现代物理基础丛书 13

大气声学

（第二版）

杨训仁　陈宇　著

科学出版社
www.sciencep.com

(O-2748.0101)

第一版书评

声波在大气中的传播及其影响是在先秦时期就受到注意的科学问题，一直研究不断，尤其是近年研究成果更为丰硕，1996年声学论文与此有关的不下于300篇，这一重要的学科分支至今还没有专门书籍，有之自杨训仁教授的专著“大气声学”始，杨训仁教授从事大气测量分析已不止三十年，积累了丰富经验，本书是他深刻地总结前人重要的研究成果和他自己的贡献而写的，是国内外出版的第一本大气声学的专著。

本书共分8章，书后列267篇参考文献，第1，2章是大气声学的基础，包括大气的特性、大气中的声波、简正波和声线，第3章至第5章是大气中的声传播：第3章折射和反射，第4章散射和衍射，第5章大气中的声吸收，第6章是重力场和地球自转对大气中声传播的影响；第7章是计算大气声学；第8章是大气声遥感。由这些内容可以看出本书是限于对大气声学的基本理论和基本现象做深入、全面的讨论和阐发，是大气声学基础，是进一步研究大气声学，发展其应用所需知识的总汇，它们不是关于大气声学的百科全书。

大气是非均匀媒质，构造复杂，大气中声波的传播还要受风的影响，温度变化的影响，球形固体地球表面的影响等等，非常复杂。书中对这些问题都做了深入、严格的处理，取得了精确解。所以本书不仅对大气声学的研究和教学非常重要，对一般声学学者，甚至于对所有物理学学者都有参考价值。

中国科学院资深院士 马大猷

——原载《声学学报》第23卷第2期190页（1998年3月）

ISBN 978-7-03-018975-2

9 787030 189752 >

销售分类建议：高等物理

定 价：52.00 元

中国科学院科学出版基金资助出版

现代物理基础丛书　　13

大气声学

（第二版）

杨训仁　陈　宇　著

科学出版社

北　京

内　容　简　介

作为全球范围内迄今唯一的大气声学专著，本书系统全面而又简明扼要地阐述了该领域内最基本的概念、现象、理论和方法。从基本方程的推导开始，分别以波动声学和几何声学的观点讨论了大气中各种“经典”声现象（反射、折射、散射、衍射、吸收等），以及重力和地球自转对包括声波在内的各种大气波行为的影响；介绍了几种数值计算方法在大气声学领域内的最新发展；“大气声遥感”一章则从“逆问题”的角度出发论述了大气声学的应用方面；在此第二版中新增加了“非线性大气声学”和“大气中的声源”两章，并重新改写了“计算大气声学”的前半部分，反映了这些方面研究的最新进展。

本书可供声学（特别是大气声学、次声学、水声学、物理声学）和大气物理、气象学等方面的高年级本科生、研究生以及相关方向的教师、科研人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

大气声学/杨训仁，陈宇著. —2版. —北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-018975-2

Ⅰ. 大…　Ⅱ. ①杨…②陈…　Ⅲ. 大气声学　Ⅳ. P427.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 069186 号

责任编辑：鄢德平　张　静/责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静/封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

1997年5月第一版
2007年6月第　二　版　开本：B5（720×1000）
2007年6月第一次印刷　印张：20 1/2
印数：1—3 000　字数：375 000

定价：52.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉）

天高地迥，觉宇宙之无穷；

风起波兴，识穹苍之多变。

第二版马序

杨著大气声学于1997年出版，但不久就脱销，足见其受读者欢迎的程度，早就有再版的必要。近年来自然和人为灾害越来越多，并且越来越严重。研究自然声源，采取安全措施，对大气声学的理论和经验的要求更为殷切。再版就无可避免了。以2004年12月26日在苏门答腊一带大地震（9级）和海啸和以后2005年4月10日的两次地震（6.7级和6.5级）为例，在印尼附近死伤几十万，影响到印度和泰国。如能及时通知，绝大部分人员可以安全撤退。根据夏威夷为禁止核试验条约设立的次声站的记录，大地震和海啸到来的信息前后有三种可分得很清楚的信号：(1)从地震原来的地震波先是压缩波（正常的P波，最快），切变波（次要的S波，较慢）和最慢的表面波；(2)第三波，在海洋声道中传播又耦合到地的波；(3)次声波，与地震源附近海啸机构共生的，或地面振动产生的。地震波和第三波的记录是由于次声站的声压传声器对地面振动的灵敏度，而次声波的记录是在大气声道中传播的声波。强地震产生的信号都是如此，但是在孟加拉湾也发现次声波，可能是海啸与海岸上温差互相作用所致。海洋下地震可以产生次声，经由海面震动或震中附近的固体地球振动。用次声站记录可及时采取安全措施，避免或减轻损失和伤害。飓风（如2005年的卡特里娜飓风和其后的丽塔飓风）也导致重大损失。台风每年都有重大破坏。次声站都有助于安全措施，声源研究也很重要。所以大气声学技术的应用和研究正方兴未艾。

马大猷

第二版作者序

本书第一版于1997年出版后不久即销售一空，一方面是由于印数太少，另一方面也说明了社会的需求。不少读者曾直接或间接向作者反映情况，要求加印。经作者与出版社协商，考虑到第一版出版后本学科的长足发展，最后决定与其加印，不如重新申请基金出版第二版。感谢参与评审诸公的支持，第二版终于得以问世。值得一提的是，本书第一版的英译"样章"(sample chapters，包括"前言"、第1章、第7章和第8章)已先后通过国际知名的 Academic Press 和 Springer 出版社所组织的专家评审，英文版问世的条件已完全具备。

第二版首先全面改正了第一版中数量相当可观的技术性错误；其次在各章节中都做了不同程度的修改、补充，反映了自第一版出版以来各方面的相应发展；这在第7章"计算大气声学"(其前半部分是整个重新改写的)和第8章"大气声遥感"中表现得尤为明显；另外增加了全新的两章：第9章"非线性大气声学"和第10章"大气中的声源"，这使得本书在系统上更完善、在内容上更充实。

自第一版出版以来的整整十年中，大气声学在国外得到迅猛发展，文献数量激增、研究成果倍出；这种情况反映出这一过去多少受到冷遇的领域已开始得到应有的重视。作者谨希望此第二版的出版在国内学术界也能激起相应的反响。

在此第二版中，第8章的8I.4节和8II.4.1节以及第9章和第10章的大部分主要由清华大学陈宇完成，其间朱松平、周燕、陈谦和方伟在文献调研、外文资料翻译和图形处理等方面做了不少工作；中国科学院图书馆前馆长阎立中在资料收集上曾提供很大帮助，作者在此一并致谢。

杨训仁

2006年9月24日于北京

第一版魏序

大气声学无疑是声学、大气物理以至地球物理中的重要内容之一。究其范畴，却缙绅难言。盖近年来不仅学科间的相互渗透与日俱增，而不时又出现新的生长点，这确实给注意分类学的人带来困难。鄙见问题还不在此，即在上述几个大类学科书籍中，很少有“大气声学”专论，即如20世纪90年代美国出版的《应用物理百科全书》有“大气声学”一章(即本书参考文献[181]—— 作者注)，计34页，若干重要问题皆未讨论，是否因篇幅有限？

杨训仁教授治学严谨、学识渊博、理论物理基础雄厚，如曩曾译布列霍夫斯基霍赫《分层介质中的波》而著称。1987年我国《大百科全书·物理卷》问世，其中“大气声学”词条即杨训仁教授所撰。《大气声学》一书包罗更广泛的内容，由第1章“绪论”及第2章“基本概念和处理方法”即可窥全书一斑。尝问大气物理学家，从地面或海平面量起几许高度属大气物理研究范围，并无确切答复，故也可包括电离层中传播(这只是列举大气中气象万千，本书得其精华，已足称著矣)，阿尔文一类问题，关于当前注意力在表面波器件，却忽略了瑞利波的原始来源，如书中还提起 Rossby 波，许多在一般有关专论皆未必提到，此例不胜枚举。

本书在“计算大气声学”及“大气声遥感”均有足够叙述，在理论方面，论述堪称完善。如大气污染是全球性公案，估计另有书籍，并非本书范畴，建议稍加引征。

本人只从事过与水雾中声吸收方面工作，同时也注意到至今并无有效人工消雾方法，如上述也属于大气声学范围，则有待解决的问题何止万千。训仁先生一书问世，定能引起学术界以至工业界的重视，是可以断言的。

魏荣爵

1996年7月8日(于南京)

第一版作者序

在从事大气声学方面研究工作的三十多年中，作者无时不感到该领域内应当有一本专著的迫切性，但同时也深知这项“前无古人”开创性任务的艰巨性，在这两种矛盾心情的交互影响下而犹豫不决。20 世纪 80 年代中期以来，作者有幸多次应邀出国讲学和进行学术交流，有机会直接接触本专业当今的国际水平，特别是1990—1991 和 1994--1995 年间两度访美，历时共 16 个月，更为收集资料、讨论问题以及具体写作提供了较好条件，为本书得以比较顺利地完成打下基础。但终究限于作者的水平和时间，本书远非一本全面高水准的专著，充其量只能充当“引玉之砖”，希望能以此唤起海内外有关学者的关注，以期能有更高水准的专著问世，这正是作者写作本书的主要动机。

能使本书问世最根本的条件是中国科学院科学出版基金的资助，因此作者首先应对该基金委员会和参与本书选题评审的诸位专家表示衷心感谢。作者还应感谢三位老师：中科院资深院士 汪德昭 、马大猷和魏荣爵的鼓励和支持。最后要感谢的是提供过宝贵资料和进行过有益讨论的国内外有关专家，其中特别应提到的是：H. E. Bass、T. M. Georges、F. F. Hall，Jr.、A. J. Bedard，Jr.、尚尔昌、B. И. Татарский、A. D. Pierce、T. Embleton 和井清武弘(T. Isei)等。

本书难免会有不少疏漏甚至谬误之处，尚希读者批评指正。

杨训仁

1996 年 4 月 20 日于北京

前　　言

声学是物理学中颇具特色的一个分支。首先，它是最先得到发展的分支之一，早在古代(无论是东方的中国还是西方的希腊)人们就对声音的本质有了基本正确的认识而没有走什么弯路(这一点相对于其"姊妹学科"光学来说就幸运得多了)，而作为一门系统的分支学科，其基本理论在经典物理的"黄金时代"——19世纪中叶就已达到相当完善的地步；其次，它又是当前最活跃的分支之一，由于它与许多其他领域(不仅涉及包括生命科学在内的几乎所有主要基础自然学科，还在相当程度上涉及若干人文学科)犬牙交错的联系而形成相应的边缘学科，使其"亚分支"的数目已达到20个以上，并且还有新亚分支不断生长出来的趋势。这种态势不仅在物理学其他分支中，即使在整个自然科学中亦属罕见。

在声学各亚分支中，大气声学又属于最古老和最重要者之一：早在18世纪初就已初步形成学科，一些重要的基本现象和相应的理论在19世纪已被陆续研究得相当成熟，后来这方面的研究一直未曾中断，近年来更有长足发展；作为人类赖以生存的物质空间和声波赖以传播的三大广袤介质之一的大气层(余者为海洋和地壳)，彻底研究并了解其中精彩纷呈的波动现象理应属于人类认识自然的一项基本任务。另一方面，由于这些现象与其他许多自然现象(特别是气象现象和其他一些地球物理现象)和人类活动紧密相关，使人类在认识它们之后有可能用来为其自身服务，这就决定了大气声学不但是一门重要的基础学科，同时也是一门重要的应用学科。

但令人感到困惑的是，对如此重要而富于特色的一门基础学科，长期以来竟然没有一本专著，1997年出版的本书第一版至今仍然是全世界范围内唯一的一本。在此之前，只有两本性质相近的书，即本书所引参考文献[32]和[208]；不要说专著，就是在一般的声学著作中也少有涉及大气声学方面的章节甚至内容。A. D. Pierce 的书[60]几乎是唯一例外。再就是一两篇综述性论文和散见于几种百科全书中的条文(特别应提到 E. H. Brown，F. F. Hall. Jr. 的杰出综述[2]和 H. E. Bass 的条文[181])。以上这些资料对本书的写作都大有裨益，在若干章节中均有直接利用。

本书第一版出版以来本学科又有了长足发展，因此亟需对第一版做出补充、修订，使其能够充分反映当前水平，本书第二版正是在这一前提下问世的。本书宗旨在于为读者提供一幅系统而严谨的"图像"，尽可能充分地反映出该领域当今的最高学术水准。理论性与实用性兼顾但侧重于前者，尤其注重对基本概念和处理方

法的论述，数学推导则“适可而止”，关键是指出来龙去脉而不拘泥于严格性。

首先对大气作为声传播介质的结构特性和声学行为做出扼要描述；然后以流体动力学基本方程为基础，结合大气介质的实际来讨论声波的反射、折射、散射、衍射和吸收等一系列过程，其间按不同场合兼用了波动声学方法和几何声学方法；以对重力场和地球自转影响的论述为契机，从“经典大气声学”过渡到“现代大气声学”，表述了由于这两种效应而衍生出的、性质上有别于寻常声波的一系列大气波。为了体现叙述的连贯和完整，对一些基本的声学关系也做出必要的推导，通过这一过程的描述来建立对大气声学的系统理解。在“计算大气声学”一章中，通过对几种传统计算方法在大气声学领域中的推广，补充了对大气声学基本课题的进一步处理方法。在“大气声遥感”一章中，以“逆问题”的角度论述了大气声学的应用方面。非线性现象在大气声学中是一种不可回避的重要内容，第二版中新增加的“非线性大气声学”一章较为全面地讨论了这方面的问题。大气中的声源问题也是多年来受到广泛关注的课题，新增加的第 10 章反映了这方面的研究进展。

本书采用一种简明的数学符号（详见 14 页脚注）。对参考文献的列出方式是：凡与正文叙述直接有关、或被直接利用、或与为进一步探讨书中因篇幅所限而被略去的细节有关的参考文献，以引用的先后为序编号列于书末；对于只涉及较次要问题（如关系到某一较不重要方程的数学推导等）的参考文献，则以加脚注的方式说明出处。

本书有不少材料（包括内容、公式、图表、脚注等）均系直接采自公开发表的书刊文献，所有被采用的文献都在相关章节中总体明确标出（个别未经发表的也注明来源）；而为了避免过于繁琐，在具体引用（如图表等）时就不再一一标明出处，特此声明。

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　学科范围和历史评述

在人类赖以生存的地球大气中，无时无地不充斥着各种各样的声波。这些声波中既包括可听声更包括次声，从“真正的”次声到其行为与寻常概念下的声波相差愈来愈远的“声重力波”、“内重力波”以及“行星波”和大气潮等；至于超声，则因其在空气中的强烈衰减而只能传播很短距离，所以在大气中不占重要地位。大气声学就是研究这些声波的发生、传播(包括反射、折射、衍射、散射和衰减等过程)、接收以及各种效应和应用的学科，它是声学中最古老、是重要的“亚支”之一。

非常明显，大气中声波的行为强烈依赖于大气本身的性质。大气性质随空间和时间的变化呈现出非常复杂的关系，声波与这种复杂的大气以及多变的地球表面之间的相互作用使得我们要完整地描述大气中声场就必须充分了解广阔范围内的物理现象。

大气虽由空气组成，但大气声学现象与小范围内特别是封闭空间内的“空气声学”现象存在着质的差别，这种差别表现为大气声学的两大特点。首先，它是涉及地球大气各种难以预测的变化和不均匀性对声波影响的一门基础科学；其次，它又是声波对大气探测研究的一种应用。第二个特点可看成是第一个特点的“逆问题”，而在一定意义下也表明了大气声学可看成是大气物理的一个亚支。当然，由于所从属的主学科不同，二者的着眼点和体系存在着很大差别。

毋庸置疑，研究大气声学的传统推动力是在大气中以声音传递信息的需要，当然这里面也包含了以声音探测大气从而获取有关大气本身信息的问题(即逆问题)。而近年来，对环境噪声的关注形成了研究大气声学的又一推动力，以致有人认为应将“空气动力声学”或“航空声学”作为一“亚分支”归人大气声学；其主要研究对象是作为声源或噪声源的强大大气流，而本书中专门增加了讨论大气中声源的一章，可以说是从另一侧面反映了这个问题。

按照笔者个人看法[1]，大气声学似可划分为“经典的”和“现代的”两大范畴：前者以低层大气中的可听声为主要研究对象；而后者以高层大气的次声为主要研究对象。

古代中国和古代希腊对声学的贡献主要在音韵律方面，而这一重点在西方17世纪科学的“再生”时期被延续下来。1635年在自由大气中测量声速要算是人类首次在大气中进行的声学实验，但当时只是为了取得足够长的传播距离才将实验

移至室外的。

现已公认，大气声学的开创性工作是英国牧师 Derham 于 1704 年进行的著名实验[2]，为了澄清当时流传的所谓"英国的户外听闻情况优于意大利的"这一含混说法，他与意大利人 Averrani 相约分别在各自国家同时进行户外实验，结果表明：在适当考虑风的影响之后，两国的声传播情况并没有什么差异。在 19 世纪初一般只鉴定出影响大气音响效果的物理现象，可是对这些现象的许多细节和数学描述则要晚得多，而大气声学的持续发展直到 19 世纪后半叶才开始。Reynolds[3]研究了大气温度随高度的变化（现代的术语叫"剖面(profile)"）及其对声波折射的影响，Stokes[4]考虑过风和风速梯度的折射效应。Tyndall[5]研究了大气起伏对声的散射，这个问题曾引起一阵争论，后来又被搁置了将近一个世纪之久，直到 20 世纪 70 年代初才得以解决（参阅第 5 章第 5.1 节）。Tyndall 当时所用的巨型喇叭（图 1）是早期实验工作的一个杰出范例。

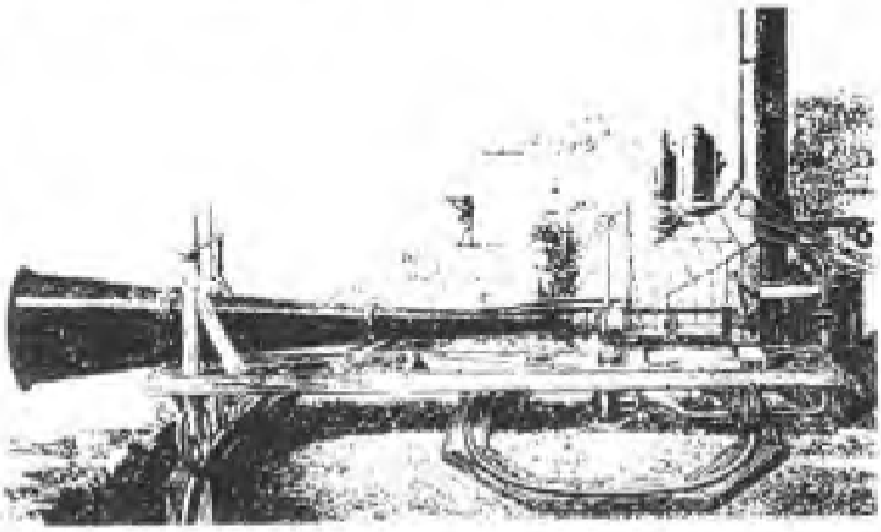


图 1　Tyndall 于 1874 年用来研究大气声传播的仪器

大部分与湍流有关的声散射过程发生在对流层中。根据气球测量，Teisserenc de Bort 于 1902 年发现了位于其上的平流层（或同温层）[6]，紧接着就观察到所谓"反常"声传播现象[7]。Emden 在假定某一高度存在一"逆温层"（其中温度随高度而增加）的前提下从理论上解释了这一现象[8]。后来对流星尾迹的观测证实了在约 50km 高度处的平流层顶的确存在这种逆温层（由臭氧层对太阳辐射中紫外线的吸收造成），Whipple 以此为基础进一步描述了这种逆温造成声折射而导致反常传播[9]。在以后的许多年内，即 20 世纪二三十年代，对爆炸声的反常传播进行了大量试验，而在此过程中，Gowan 于 1929 年注意到了一些当时尚不认识的，频率非常低的声波[10]，即现在所谓的"次声波"。其后于 1938 年开始，Gutenberg 对这种次声波的来源和传播进行了广泛研究[11]，从此进入了"现代大气声学"的范畴。

由于高空的空气稀薄，在探测时气球已无能为力，因此 20 世纪 50 年代开始用火箭探测 80km 高处的温度和风[12]，高层大气资料的充实对次声超远传播研究起了很大促进作用。

在湍流大气方面，从 Taylor 开始[13]逐渐引进湍流理论来研究小尺度的大气动力学结构，重新唤起人们对声散射的兴趣。Обухов 于 1941 年将声散射截面同湍流动能谱密度联系起来[14]，但他在推导中忽略了一个事实，即在非齐次波动方程的"源项"中，不仅应包含声折射系数本身，还应包含它的梯度。尽管如此，他的工作仍代表了对大气中声散射作定量解释的初步尝试。在无湍流的"光滑"大气情形下，Bergmann 证明了静态密度梯度的出现将造成声传播的频散（相速度依赖于频率）[15]。他同时还以相关函数的观点研究了散射[16]。

对于湍流大气，Блохинцев 引进假定：只有湍流惯性区内的波数才会影响可听声和高频次声的传播，这样就可将 Kolmogorov 谱应用于散射截面[17]。在 1953 年，Kraichnan[18]和 Lighthill[19]同时求得散射截面依赖于速度那部分的正确形式。四年后，Batchelor[20]得到至今仍在使用的散射截面，其依赖于速度的部分与上述二人所求得的相同，还有一部分依赖于一附加参量（如声速或温度）起伏的谱密度。尽管他并未将总散射截面表为上述两部分之和，但由于截面所表示的是归一化能流从而各"分截面"是可叠加的，所以将总截面表为依赖于速度部分与依赖于温度部分之叠加是不言自明的。

在明显未注意到前人工作的情况下，1961 年 Tatarskii 将总散射截面表为上述两部分之和[21]，不幸的是，他犯了与 Обухов 同样的错误，在推导中忽视了梯度，从而在他的结果中未出现依赖于散射角 θ 的因子 $\cos^2\theta$。他的理论表达式与后来的实验结果在 90°附近对散射角的依赖关系存在明显分歧，这样才促使其本人和 Monin 重新审查推导[22]。

自 20 世纪 60 年代以来随着大气中多种自然源次声相继被检测到，以及大气层中核试验的开展，大气的被动遥感技术得到迅速发展。而主动声遥感则是受到若干姊妹学科的启发而发展的。如回声探测仪的先驱"声达"（SODAR——sonic detection and ranging）就是 Gilman 等在雷达的启发下于 1946 年发明的[23]。在此基础上，McAllister[24]于 1968 年作了三项重大改进：改进发射天线使其在 1000Hz 下工作而高度可达 1.5km；用天线本身兼作接收器；借用声呐技术中的传真记录器。这种回声探测器的发明在很大程度上重新唤起了大气物理研究者们对声学的兴趣，在现代大气声学的发展中起了很大促进作用。

近年来的进展包括如下一些方面：利用折射的新途径、对声传播时相位和振幅起伏的研究、借助次声对大尺度大气过程作深人了解、高功率声学天线附近的非线性效应研究、与噪声有关的问题、依靠 Doppler 效应的各种应用、兼用声波和电磁波的混合器件的研制等等。应当着重提出的是，随着计算方法和技术的迅猛发展，

以20世纪初一本专著[117]的出版为标志，一门崭新的"亚分支"——"计算大气声学"业已形成，这对整个大气声学的发展都是一种重要的推动。至于其余更新的进展将结合具体内容分别在有关各章节（特别是最后四章中）中详述。

1.2 大气结构及其声学特性

1.2.1 大气的分层结构

描述大气状态的主要物理参量是其密度、压力和温度。由于重力作用，大气密度从而压力是随高度递减的；而温度随高度的变化则复杂得多，这主要是不同高度大气对太阳辐射的响应不同造成的。在分界相当明确的各个区域内，大气对辐射的吸收情况大致为：在约100km以上的高度，主要是氧分子（O_2）对极短波长辐射的吸收；在高度35～70km之间，主要是臭氧（O_3）对辐射中近紫外线的吸收；在15km以下的低层大气，主要是水汽（H_2O）和二氧化碳（CO_2）对再辐射的红外部分的吸收；在地面或海平面，则是地面或海面对可见光部分的吸收。正是这种吸收机制的差异造成了大气温度对高度的依赖关系，如图2所示。

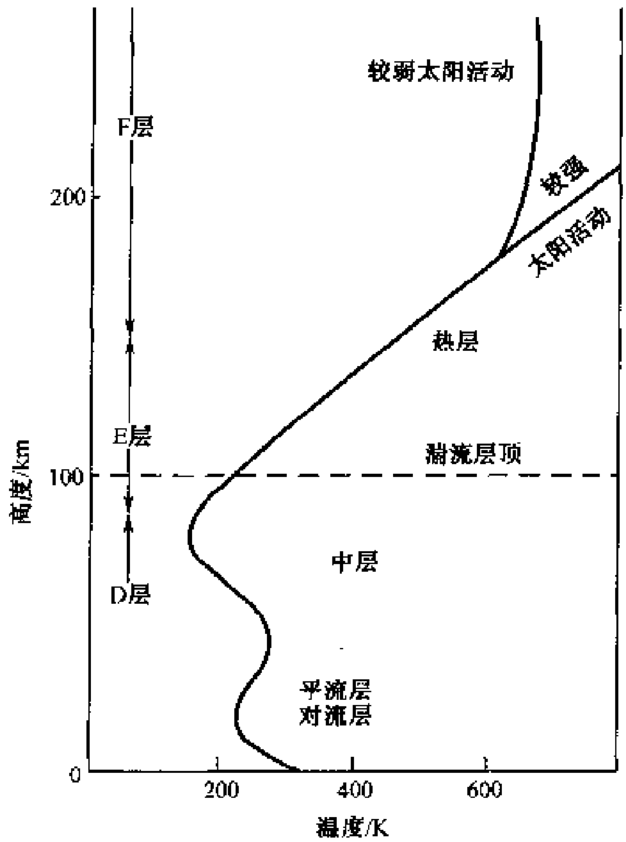


图2 大气的温度剖面

气象学家们为了简化研究，将大气结构按性质之不同分成相互连接的若干层。在最低的一层对流层中，温度随高度递减，而在对流层顶达到局部极小值。对流层顶的高度从两极附近的 10km 左右变为赤道上空的 20km 左右，这种变化并非平滑的而是跳跃式的；从极地到亚热带再到热带经历再次跳跃，而在这两个"中断处"下方的区域包含着被称作急流的高速气流（至少在冬季是如此；而在夏季，某些高度上的强西风带转变为弱东风带）。

对流层的结构主要依赖于大气中水分的含量及其中的相变，也依赖于水汽的垂直对流。对流层最下而一部分即为大气边界层，其厚度从晴朗白昼的 1～2km 变化到夜间的数百米；在夜间和有烟雾情况下，这一层中的温度不再像通常那样随高度降低。边界层最大限度地表现出地面对大气中热通量和动量通量的影响。边界层既可具备不稳定的"开放"结构，当温度随高度降低时起到使这些通量影响较高层大气的通道作用；也可具备稳定的"封闭"结构，当在相反的情况下时起到与大尺度过程分离的不可穿透容器的作用。边界层中温度随高度的增加（被称作"逆温层"）就像一个"盖子"，起到防止大气污染弥散开来的作用。

对流层顶以上称为高层大气，其最下而部分即为平流层，其中水汽含量非常低；至于温度，原本其发现者 T. de Bort（1902）认为是常数，并由此而得到"同温层"的别名，但后来的研究表明，其上部含有随高度呈增长趋势的 O_3，由于上文提到的 O_3 对紫外线的强烈吸收而使平流层上部的温度随高度增加，直至平流层顶（高度约 45～55km）达到极大值。在再上一层（中层）中温度再次随高度递减，而大气的分子组成开始改变。从位于中层顶（高度约为 80～85km）的第二个极小像开始，大气温度再次（也是最后一次）向上"爬高"，从而形成"热层"，直到约 200km 高度处，然后保持常值直到 1000km 以上。上部热层的行为是等温的，这是由于其导热性非常之强，以致将气体所吸收能量的大部分都往下传递了。热层的极限温度决定于所进入的紫外辐射，所以会随季节、太阳活动周期以至温度的日变化和纬度变化而异。

在 600km 以上，气体密度已减小到使空气的行为不再像流体，从而流体动力学已不适用，所以这个高度可看成是大气的上限。对于 600km 以外的区域，有许多不同名称，如间圈（氢原子优势圈）、外逸层、质子层、地华等等。

太阳辐射的另一重要作用是使中性粒子电离化，所以在高层大气中存在着自由电子、离子和中性粒子的区域，此即为电离层。它包含 3 个主要的层：D 层（60～90km）、E 层（90～150km）和 F 层（150km 以上，在较高纬度处直达大气上限）。在 D 层和 E 层中，各种成分的温度是相等的，但在 F 层中，电子温度高于离子温度，而离子温度又高于中性气体温度。

图 2 上用虚线示出的是高度约为 105km 的湍流层顶，这是大气湍流区与层流区的分界面。在 85～105km 之间的过渡区中也可能有层流存在，但在 85km 以下

则总是湍流——这导致大气成分的对流混合从而使平均分子量保持为常数，而在此高度以上，氧和氮的分离导致平均分子量持续减小。

1.2.2 大气的湍流结构

大气除了"宏观"上的分层结构之外，还存在着"微观"上的湍流结构，这指的是大气粒子所作的服从某种统计规律的无规(随机)运动。对湍流的分析是以一系列各种尺度的涡旋为基础的，它们之间相互叠加并相互作用，而能量连续地从较大尺度的涡旋流向较小尺度的涡旋，最终达到的下限决定于不能再形成涡旋的最小起伏，时间尺度在数十分钟以内的大气涡旋都被认为属于大气湍流。

在实际的黏性流体中，湍流的发生同作用在流体上的惯性力与黏性力之比(即 Reynolds 数[①])

$$Re = UL/\nu$$

这里，U 为流速，$\nu=\mu/\rho$ 为流体的运动黏性；L 为某一特征长度，当流体受到扰动时，惯性力的作用是使扰动从主流中汲取能量而黏性力则是使扰动受到阻尼。因此，$Re>1$ 就形成了湍流发生的必要条件。除此之外，还需要相应的热力学条件和动力学条件，并由此分别形成大气湍流的两种来源：温度的不均匀分布，特别是由于地面变热和变冷所引起的热卷流，导致"热致湍流"形成；地面摩擦所造成的风速梯度引起风切变，并最后发展成湍流涡旋而导致"风致湍流"形成。在大多数情形下都是以后者占优势。

分层流体中湍流运动是持续还是消亡取决于 Richardson 数$Ri=\omega_B^2(\partial U/\partial z)^2$，根据下文的(1.28″)式又可写为(关于位温 θ 的定义参见本章 3.3 节)：

$$Ri = \frac{g}{\theta} \cdot \frac{\partial\theta/\partial z}{(\partial U/\partial z)^2}$$

它的数值提供了与风切变非稳定化效应相比较的、以温度梯度修正了的重力稳定化影响的一种量度。实际上，它是湍流能量中的浮力作功部分与 Reynolds 应力做功部分之比。$Ri<0$ 表示不稳定条件，这时浮力做功使湍流增强；$Ri>0$ 表示稳定条件，这时湍流将消耗一部分能量于反抗浮力做功，因此将减弱。其间的临界值 $\frac{1}{4}\leqslant Ri\leqslant 1$(Miles-Howard 判据)为不可压缩或可压缩流体不稳定性的一个必要条件，这时湍流将完全受到抑制而转变为层流。

通常较强的大气湍流出现在下列三种区域内：大气边界层中、对流层上部的急流区中和对流云的云体中，而分别称为边界层湍流、晴空湍流(CAT)和对流云湍

---

① 这一定义源于实验室管道中的流动，不一定适合像大气这样的广袤介质，至少不存在固体管壁所引起的黏性应力。因此有时引进"地球物理"Reynolds 数 $Re_g=\omega_B L^2/\nu$，这里 ω_B 为下文(1.28)式所定义的 V-B 频率。在大尺度现象中 $Re_g\gg Re$，它至少在说明小尺度湍流行为方面是恰当的。

流。大气湍流在顺风、横风和铅直三个方向上的尺度和强度都不相同，因而它是各向异性的。一般情况下铅直分量比两个水平分量都小。边界层湍流主要受地面状态控制；晴空湍流的铅直范围（几十米到几百米）总是小于水平范围（几千米到几十千米）；对流云湍流则可以有不同情况。

大气湍流的涡旋能量谱可分为大尺度的含能区和中小尺度的平衡区两个频段，在平衡区内湍流从上一级尺度较大的涡旋得到的能量一部分输往下一级尺度较小的涡旋、一部分耗散于分子黏性。平衡区又可分为两个亚区：不考虑分子黏性耗散的惯性区和分子黏性耗散区（图 3）。在能量逐级传输的过程中，外部条件的影响逐步消退，从而逐步失去大尺度涡旋的各向异性特性、逐步趋于小尺度涡旋的各向同性特性，所以在实际大气中，湍流基本上是局部各向同性的。这种局部各向同性可以根据量纲分析用统计函数来表示，例如，下面的湍流速度起伏结构函数

$$D(r_1, r) = \langle |v(r_1 + r) - v(r_1)|^2 \rangle \tag{1.1}$$

（其中〈〉表示总体平均）既满足局部各向同性条件 $D(r_1, r) = D(r)$ 又满足 Kolmogorov-Обухов 惯性区定律（即著名的 2/3 次方定律）[14,25]

$$D(r) = C_v^2 r^{2/3} \tag{1.2}$$

上式同时也定义了湍流速度起伏“结构常数”C_v^2，在不稳定情况下，C_v^2 随高度而变。

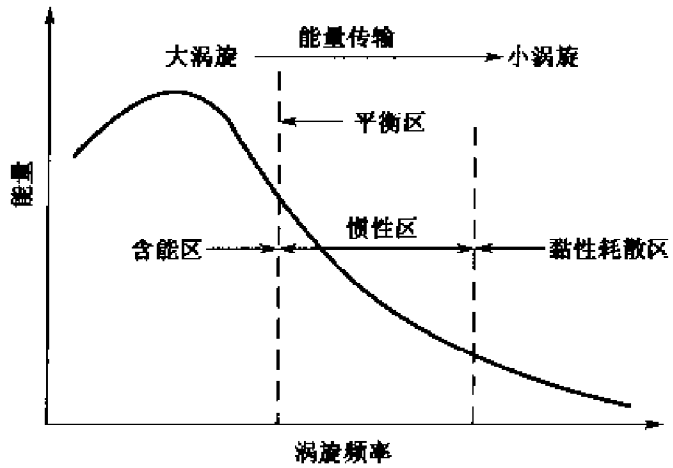


图 3　大气湍流涡旋的能量分布

1.2.3　大气的声学特性

从声学观点来看，大气是一种运动着的不均匀介质，而其不均匀性正如上文所述，首先表现为分层不均匀性，即其主要参量基本上只随高度变化（这种函数关系称为“剖面”），分层不均匀性导致声波的连续折射（在这种情况下反射往往可以忽

略)，一定的剖面对应着一定的声场分布。

大气经常处于不断的运动之中，使其中的声现象进一步复杂化，所幸在一般情况下，其运动(风)主要也只依赖于铅直坐标系。也就是说大气基本上是一种运动分层介质。这样又使问题相对地易于处理。

大气的声学特性主要由其中的声速所表征，面声速与温度成正变关系①。绝大多数情况下，风的效应可以引进"有效声速"的概念来计及，即将大气看成是静止的，但声速代之以声速与风速之矢量和，这样就可以把温度和风的剖面结合起来。图4就是这种剖面的典型情况。它一般随纬度和季节而变，甚至随每天的不同时间而变，特别是近地面层中的变化更大，高空则相对稳定。可注意其中有两个有效声速的极小值，分别出现在约15km和80km的高度上。无论剖面怎样随纬度和季节等变化，这两个极小值总是存在的，只是出现的高度会有所改变。在某些情况下，还会在地面附近出现第三个极小值。所有这些极小值都形成"波导"(或称"声道")，它们对声在大气中的远程传播产生有利影响。

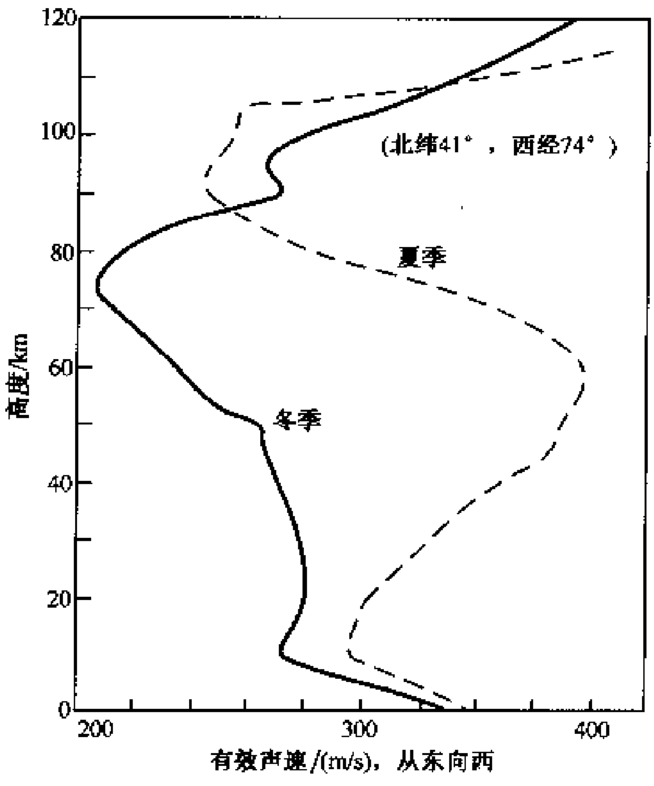


图4 中纬度大气中有效声速的典型剖面

至于居第二位的无规不均匀性，既包含大气"成分"的不均匀性，即存在于大气

① 一般情况下，可将大气看成理想气体，从而声速与绝对温度平方根成正比。如要求更高精度，则可采用声速与温度之间的经验公式，这是一种正变关系，详见下文。

中的小水滴、雾和其他微粒，又包含大气本身运动的不均匀性，即上小节中谈到的大气湍流。声波与湍流之间会发生强烈的相互作用，对这种相互作用进行理论分析所需要的还不是(1.2)式所定义的结构函数 $D(r)$，而是速度起伏相应的一维和三维空间谱，这些谱乃是坐标空间 x_i 向变量 κ_i 相关联的 Fourier 空间作 Fourier 变换的结果。以 $\kappa=(\kappa_i\kappa_i)^{1/2}$（重复的下标表示对分量的平方项求和）来表示，与 $D(r)$相关联的动能谱成为[26]

$$E(\kappa) = 0.76C_v^2\kappa^{-5/3} \tag{1.3}$$

而对应的三维速度谱成为

$$\Phi_{ij}(\kappa) = [\delta_{ij} - \kappa_i\kappa_j/\kappa^2]E(\kappa)/(4\pi\kappa^2) \tag{1.4}$$

其中，δ_{ij} 为 Kronecker 符号，当 $i=j$ 时为 1 而当 $i\neq j$ 时为 0。

当然，导致声波折射的分层结构与导致声波散射的湍流结构并非互不相干，它们之间同样存在着相互作用。如作用在大气声折射率 n 的平均铅直梯度上的湍流速度起伏场就可以派生出折射率 n 的起伏。同样，折射率起伏的结构函数 $D_n(r)=\langle|n(r_1+r)-n(r_1)|^2\rangle$也满足 Kolmogorov-Обухов 定律

$$D_n(r) = C_n^2r^{2/3} \tag{1.5}$$

其中的折射率起伏结构常数[27]

$$C_n^2 = C_T^2/(4T_0^2) + 2(0.307)C_{eT}/(4p_0T_0) + (0.307)^2C_e^2/(4p_0^2) \tag{1.6}$$

其中，T_0、p_0 分别为平衡温度和压力，C_T^2 为温度起伏结构参数，C_{eT}^2为表示湿度起伏与温度起伏之间互相关的参数。

在图 5 上示出白昼不稳定条件下，描述湍流强度的参量 C_T^2 和 C_v^2 随高度的典型变化(剖面)[28]。

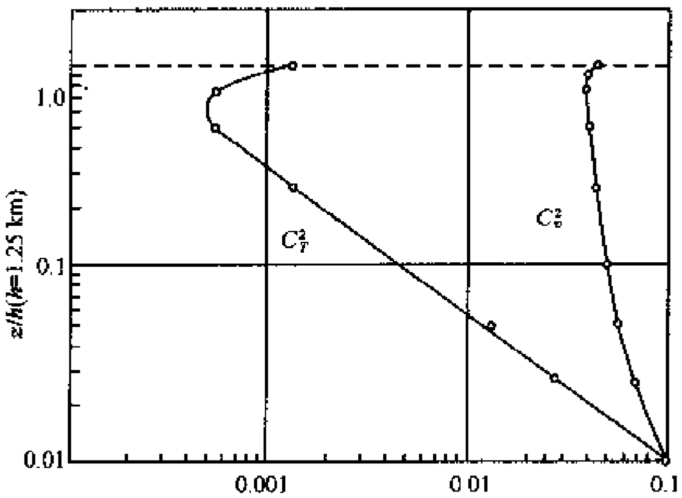


图 5 白昼时 $C_T^2(K^2m^{-2/3})$和 $C_v^2(m^{4/3}s^{-2})$的典型剖面

1.3 大气中的热力学关系

1.3.1 状态方程和绝热方程

同任何流体一样，大气特性也可以用密度(ρ)、压力(p)、温度(T)和熵(s)中的任意两个来描述，现在选择前两个变量，因为它们给出大气中物理过程最直观的概念。

在很高的近似程度下，大气可看成是理想气体，这样，它的所有分子都是等同的并且只在碰撞时才相互作用，而在两次碰撞之间按直线运动。理想气体的定压比热容和定容比热容均保持为常数。于是密度和压力通过状态方程与温度相联系

$$p = \frac{\rho}{M}RT = \frac{\rho}{m}k_{\mathrm{B}}T \tag{1.7}$$

其中，M 为平均相对分子量(kg/kmol)、m 为分子平均质量(kg)，从而 $M=N_{\mathrm{A}}m$，这里 N_{A} 为 Avogadro 数$=6.02\times10^{26}$分子/kmol；R 为普适气体常量$=8.31\times10^{3}$ J/(mol · K)，k_{B}为 Boltzmann 常量$=R/N_{\mathrm{A}}=1.38\times10^{-23}$J/K。

在 80km 以下的大气中 M 保持为常数值 28.966kg/kmol，而从 80km 处开始随高度的增加而下降，这是由于氧分子(O_2)的分解以及 O_2 和 N_2 的扩散分离造成的，到 400km 以上，就主要是原子氧(O)了。M 随高度 z 的这种变化可以如下的分析式表示之(z 以 km 表示)[29]

$$M = 28.9 - 6.45\left(1 + \tanh\frac{z-300}{100}\right) \tag{1.8}$$

由于理想气体的任何运动过程都是绝热的，故由热力学第一定律，一定气团的内能增量就应等于该气团改变体积所做的功：$\mathrm{d}\varepsilon=-\mathrm{d}W$，亦即

$$c_v\mathrm{d}T = (p/\rho^2)\mathrm{d}\rho \tag{1.9}$$

其中 c_v 为单位质量的定容比热容。利用状态方程(1.7)并积分后，即得到绝热方程：

$$p\rho^{-\gamma} = \mathrm{const.} \tag{1.10}$$

其中，$\gamma=c_p/c_v$ 并利用了 Mayer 方程 $R=M(c_p-c_v)$，c_p 为单位质量的定压比热容。

在 O_2 和 N_2 让位于 O 的高层大气中，γ 的值将从双原子气体的 1.40 增加到单原子气体的 1.67，从而有一类似于(1.8)式的 γ 分析式(高度 z 仍以 km 表示)

$$\gamma = 1.4 + 0.135\left(1 + \tanh\frac{z-300}{100}\right) \tag{1.11}$$

与理想气体中任何其他运动形式一样，声波过程也应是绝热的，因此压力的微

小变化 p_1 与密度的微小变化 ρ_1 之间存在关系

$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho_1 = c^2 \rho_1 \tag{1.12}$$

其中 $c=(\partial p/\partial \rho)_s^{1/2}$ 为声速。

除了过程中有热交换(如考虑介质的导热而引起声波衰减)之外，当声波频率过低时也不能看成是绝热的。这时对以上讨论须加修正。

1.3.2 气压计方程和标高、等温大气和等温度梯度大气

在很高的高度范围以内，大气处于由铅直压力梯度所产生的力与重力之间的流体静力学平衡，即可表示为

$$\partial p/\partial z = -\rho g \tag{1.13}$$

这里，g 为重力加速度，负号是由于 g 指向下，而高度 z 是向上量度的。利用状态方程(1.7)消去 ρ 后积分得出气压计方程

$$p = p_0 \exp\left(-\int_0^z \left[\frac{Mg}{RT}\right] dz\right) \tag{1.14}$$

p_0 为 $z=0$ 处的压力。

等温大气是最简单的一种大气模型，在这种情况下 T 与 z 无关，因而上式得到简化。同样可以得到关于密度的类似关系，二者兼称为 Halley 定律：

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \tag{1.15}$$

其中引入了被称为“标高”或“匀质大气高度”的重要参量

$$H = \frac{RT}{Mg} \tag{1.16}$$

一般说来它是 z 的函数，其物理意义为：任一特定高度 z 处的标高代表一根密度为 ρ_0 的均匀气柱的高度，该气柱在 $z=0$ 处所产生的均匀压力为 p_0；这时假定整个气柱的温度都等于高度 z 处的温度，并假定 g 随高度的变化可以忽略。

H 也可用比热容比 γ 和声速 c 来表示，因为按理想气体定律(1.7)可得

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \frac{\gamma RT}{M} \tag{1.17}$$

所以

$$H = \frac{c^2}{\gamma g} \tag{1.16a}$$

温度梯度为常数的大气模型比等温度大气稍复杂一些，与等温大气一样具有理论上的基本意义，因为可以由二者的结合来构成更接近于实际大气的模型。

这种情况下，可设

$$T = T_0 + \alpha z \tag{1.18}$$

其中 α 为一常数，这时代替等温情况下的 Halley 定律，方程(1.14)的解为

$$p = p_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{-Mg/R\alpha} \tag{1.19}$$

同时在这种情况下，ρ/ρ_0 不再等于 p/p_0

$$\rho = \rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{-1-(Mg/R\alpha)} \tag{1.20}$$

在绝热、或等熵大气情况下，利用(1.10)式可得

$$T\rho^{1-\gamma} = \text{const} \tag{1.21}$$

$$Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const} \tag{1.22}$$

将上式对 z 微分并利用流体静力学方程(1.13)和状态方程(1.7)，可得绝热温度梯度

$$\alpha_s = \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_s = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{p}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{-(\gamma-1)Mg}{\gamma R} \approx -9.8\text{K/km} \tag{1.23}$$

它是判断大气稳定性的重要判据，如大气的负温度梯度超过此值，就会成为不稳定的。在气象学上将 $-\alpha$ 称为"直减率"，而 $-\alpha_s$ 相应地称为绝热直减率。

将(1.18)式和(1.23)式分别代入(1.19)式和(1.20)式后即得到绝热大气的压力和密度剖面

$$p = p_0\left(1-\frac{(\gamma-1)Mgz}{\gamma RT_0}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{1.24}$$

$$\rho = \rho_0\left(1-\frac{(\gamma-1)Mgz}{\gamma RT_0}\right)^{1/(\gamma-1)} \tag{1.25}$$

将有关数值代入(1.25)式后可看出：当 $z=27.5$km 时 $\rho=0$，这一高度可看成是绝热大气的上限。

在具有对流运动(如湍流)的大气中，有助于绝热平衡的建立，因为对流的进程比建立等温平衡所必需的热传导进程快得多。所以在 100km 的湍流层顶以下的大气中应呈现绝热平衡。作某种程度的推论，整个对流层亦应如此，但实际上它并非理想的绝热平衡：其直减率为 5K/km，而不是(1.23)式所给出的 9.8K/km；对流层顶是在 8～20km 之间，而不是(1.25)式所给出的 27.5km。可是只有在对流层中，温度分布才是由对流控制的，而在平流层中是由辐射控制的。这是因为太阳发出的可见光和红外辐射只有少量被大气吸收，而大部分得以穿透。因此除了在很高的高层以外，太阳辐射并非真正加热了大气，而是加热了地面，然后将远红外部分再辐射回大气。大气中占少量份额的水汽和二氧化碳强烈吸收红外线，因此如果没有对流运动，在水汽和二氧化碳占优势的近地面大气中的温度分布将急剧下降，这一下降导致大气的不稳定而最终由对流运动来平衡。

1.3.3 位温和 Väisälä-Brunt 频率

静态平衡只可能在各作用力完全均衡的情况下才会发生，但反过来却不一定

对，均衡的各力无法保证平衡结构必定出现。在大气中，经常有一些小的外力来干扰严格的平衡条件，对这种小干扰的响应方式由其稳定性表征，而大气的稳定性由其温度分布控制。

除直减率外，气象学上还引用另一个参量：位温 θ，即一气团的气压被绝热地导致一参考压值(通常为海平面气压 p_0，实用上取为 1000mb*)时其所应具有的温度。按此定义即得 Poisson 方程

$$\theta = T(p/p_0)^{(1-\gamma)/\gamma} \approx T(1000/p)^{0.286} \tag{1.26}$$

可见当大气处于绝热平衡时，其位温处处为常数。

位温的实用性在于，其梯度意味着向上或向下的热传递，并表明一气团是否为“稳定的”或“不稳定的”，即该气团一偶然位移的结果是导致一恢复运动使位移减小还是反过来使位移增加，所以在讨论大气状态时，位温 θ 是一非常恰当的量。

当一气团在一稳定大气中作铅直位移时，就会受到一恢复力的作用。如合成振荡的频率足够高，重力的作用就可忽略而波动就如寻常声波那样以大气可压缩性为恢复力而传播。但在较低频率下，重力恢复力就可与压缩恢复力相比拟而不能再被忽略。

设高度 z 处的一气团经受了一无限小位移 Δz，其密度由原来的 ρ 变为 $\rho+\Delta\rho$，这里 $\Delta\rho=(\Delta\rho/\Delta p)\Delta p$，如位移系绝热地进行，则 $\Delta p/\Delta\rho=c^2$。气团在原来状态下密度 ρ 与周围大气密度 ρ_0 相等，但在位移后二者就不再相等了。由于密度随高度变低，位移后气团的环境密度也有一增量：$\Delta\rho_0=\left(\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}z}\right)\Delta z$。因此气团受到一浮力作用，而必须与惯性力平衡

$$\rho_0\frac{\mathrm{d}^2(\Delta z)}{\mathrm{d}t^2}=g(\Delta\rho_0-\Delta\rho)=g\left(\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}z}+\frac{\rho_0 g}{c^2}\right)\Delta z$$

这里假定了流体静力学平衡不因气团的位移而破坏，在

$$\frac{g}{\rho_0}\left(\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}z}+\frac{\rho_0 g}{c^2}\right)<0 \tag{1.27}$$

的前提下，上方程的解是一频率为①

$$\omega_{\mathrm{B}}=\left[-\frac{g}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}+\frac{g^2}{c^2}\right]^{1/2} \tag{1.28}$$

的自由振荡。这一大气固有振荡率称为 Väisälä-Brunt 频率(简称 V-B 频率)，是大气动力学中最重要的参量之一。对于理想气体，显见

$$\omega_{\mathrm{B}}^2=\frac{g(\alpha-\alpha_s)}{T} \tag{1.28a}$$

① 通常在文献中这个量都用 N 来代表，但我们用 ω_{B} 和 ω_g 来代表，是为了体现出系统性。

* 1mb=10^2Pa。

进一步对于等温大气($\alpha=0$)，

$$\omega_g^2 = \frac{(\gamma-1)g^2}{c^2} \tag{1.28b}$$

因此，

$$\omega_B^2 = \omega_g^2 + \frac{g}{c^2}\frac{\partial c^2}{\partial z} = \omega_g^2 + \frac{g}{T}\frac{\partial T}{\partial z} \tag{1.28a$'$}$$

利用前述的一些关系和定义，容易看出 V B 频率可以完全以声速表示出

$$\omega_B^2 = -g\left\{\frac{g}{c^2}(1-\gamma) - \frac{2}{c}\frac{\partial c}{\partial z}\right\} \tag{1.28$'$}$$

或以位温写成更简明的形式

$$\omega_B^2 = \frac{g}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} \tag{1.28$''$}$$

1.4　大气动力学基本关系[30]

众所周知，流体的运动可用两种体系来描述：以坐标系联结在与流体一起运动的粒子上的 Lagrange 法和以坐标系固定于空间中的 Euler 法，这两套体系以 Stokes 算符①

$$D_t \equiv \partial_t + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} \equiv \partial_t + v_i\partial_i \tag{1.29}$$

相联系，其中 v 为流体运动速度，在我们的情况下就是大气中的风速。

利用这一"时空兼顾"的算符，可将描述大气运动的流体动力方程组写成最简洁形式。

1.4.1　运动方程

运动方程(Euler 方程)所表述的牛顿第二定律"动量的时间和空间变率等于作用在单位体积上的力"这一涵义用上述符号来表达就是

$$\rho D_t \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} \tag{1.30}$$

这里的 $\boldsymbol{f}$ 在不同情况下有不同的内涵，如考虑的是略去附加力和损耗力的寻常声

---

①　本书此后采用如下的微商符号：即以下标表示对该下标的微商，例如，以 $d_t \equiv d/dt$ 表示时间全微商，以 $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ 表示时间偏微商，以 $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ 或 $\partial_i = \partial/\partial x_i = \partial/\partial \boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{\nabla}$ 表示空间偏微商等。这种符号除了简洁之外还可与张量符号统一。我们规定，任何一个写出的下标都意味着要遍取 1,2,3 三个值，它们对应于直坐标系中的三个分量，因此矢量 $\boldsymbol{v}$ 就写成 v_i；出现两次的下标表示必须遍取 1,2,3 三个值后再相加，例如，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \sum_{i=1}^{3} A_iB_i = A_iB_i$。另外再引进单位张量[或 Kronecker 符号，如已在(1.4)式中引进的]δ_{ik}，当 $i=k$ 时为 1；而 $i\neq k$ 时为 0。显然，$\delta_{ik}A_k = A_i$；对于二阶张量 A_{ij}，则有 $\delta_{ik}A_{kl} = A_{il}$，$\delta_{ik}A_{lk} = A_{li}$ 等。

波，$\boldsymbol{f}$ 就是 $-\nabla p$；这时(1.30)式成为

$$D_t \boldsymbol{v} = \partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \tag{1.30a}$$

如考虑到重力，还需加上一项 $\boldsymbol{g}$；对于波长更长的行星波和大气潮，则还需再加上 Coriolis 力。详见第 6 章的讨论。

从(1.30a)式可看出，介质元的加速度由两部分组成：左端第一项表示流体中一特定点的局部加速度，即某固定点的速度随时间的变化率(非定常流)；第二项称为徙动(或对流)加速度，它是由于介质元在时间间隔 dt 内因改变自己的空间位置到达质点速度取另一值的点上而引起的。

对于如声波运动这样的等熵运动，(1.30a)式还可写成另一形式。由热力学第二定律

$$dw = T ds + \frac{1}{\rho} dp$$

其中，$w = \varepsilon + \dfrac{p}{\rho}$ 为单位质量的焓(ε 为单位质量的内能)，当熵 $s = \text{const}$ 时 $dw = \dfrac{1}{\rho} dp$，从而(1.30a)式成为

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = -\nabla w \tag{1.30a$'$}$$

利用矢量分析中的熟知公式：

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = \boldsymbol{v} \times \nabla \times \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v}$$

还可将上式写成

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \boldsymbol{v} \times \nabla \times \boldsymbol{v} = -\nabla w \tag{1.30a$''$}$$

在上式两端作 $\nabla \times$(curl)运算，由于 $\nabla \times \nabla \equiv 0$，便给出只包含速度 $\boldsymbol{v}$ 的方程

$$\partial_t (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \nabla \times \boldsymbol{v})$$

1.4.2 连续性方程、状态方程、张量形式

表示质量守恒的连续性方程可写成

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1.31}$$

或者

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1.31$'$}$$

而表示能量守恒的状态方程(1.12)可写为

$$D_t p = c^2 D_t \rho = -c^2 \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{1.32}$$

在某些情况下，以张量形式写出连续性方程(1.31′)和 Euler 方程(1.30a)更为方便：

$$\partial_t \rho = -\partial_k \rho v_k, \quad \partial_t v_i = -v_k \partial_k v_i - \frac{1}{\rho} \partial_i p$$

从以上两式得到

$$\partial_t \rho v_i = -\rho v_k \partial_k v_i - \partial_i p - v_i \partial_k \rho v_k = -\partial_i p - \partial_k \rho v_i v_k$$
$$= \delta_{ik} \partial_k p - \partial_k \rho v_i v_k \equiv -\partial_k \Pi_{ik} \tag{1.30b}$$

其中

$$\Pi_{ik} \equiv p\delta_{ik} + \rho v_i v_k \tag{1.33}$$

称为动量流密度张量(有时这一名称仅指第二项而言,而其第一项则称为应力张量)。

方程组(1.30)～(1.32)是描述大气中包括声波和其他大气波在内所有流体运动的基本方程组,其中除连续性方程"以不变应万变"之外,其余两方程在不同情况下均需作不同程度的相应修正。

1.4.3　守恒定律

上述三个基本方程实际上可归结为三个守恒定律。为此,将某物理量 φ 在单位时间内通过与流体速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直的单位面积的量定义为 φ 的流密度

$$\boldsymbol{j} = \varphi \boldsymbol{v} \tag{1.34}$$

如 φ 代表的是流体密度 ρ,则上式即表示质量守恒

$$\boldsymbol{j}_m = \rho \boldsymbol{v} \tag{1.34a}$$

相当于连续性方程。在上一小节末尾我们已看到 Euler 方程相当于动量守恒,而类似的关系对能量流也是成立的。

流体单位体积的能量为动能 $\rho v^2/2$ 与内能 $\rho\varepsilon$ 之和(由于在此不考虑重力,故不出现势能),动能随时间的变化可写为

$$\partial_t(\rho v^2/2) = \frac{v^2}{2}\partial_t \rho + \rho \boldsymbol{v} \cdot \partial_t \boldsymbol{v} = -\frac{v^2}{2} \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot \nabla p - \rho \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v}$$

其中利用了连续性方程(1.31′)和 Euler 方程(1.30a)。应用矢量分析公式可将最后一项变换为 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}_m \cdot \nabla v^2$;再按热力学第二定律对 ∇p 加以变换[参阅(1.30a′)式前的讨论],便得到

$$\partial_t(\rho v^2/2) = -\frac{v^2}{2} \nabla \cdot \boldsymbol{j}_m - \boldsymbol{j}_m \cdot \nabla \left(w + \frac{v^2}{2}\right) + \boldsymbol{j}_m \cdot T\nabla s$$

现在来计算内能随时间的变化。同样由热力学第二定律可求得

$$\mathrm{d}(\rho\varepsilon) = \varepsilon \mathrm{d}\rho + \rho \mathrm{d}\varepsilon = \varepsilon \mathrm{d}\rho + \rho T \mathrm{d}s + \frac{p}{\rho}\mathrm{d}\rho = w\mathrm{d}\rho + \rho T \mathrm{d}s$$

于是

$$\partial_t(\rho\varepsilon) = w\partial_t \rho + \rho T \partial_t s = -w\nabla \cdot \boldsymbol{j}_m - \boldsymbol{j}_m \cdot T\nabla s$$

其中第二步利用了(1.31′)式和熵的连续性方程

$$\partial_t(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1.35}$$

这可由以(1.34)式中的 φ 代表流体的熵密度 ρs 而直接看出。将(1.35)式减去(1.31′)式即得到理想流体运动的绝热方程

$$\partial_t s + \boldsymbol{v} \cdot \nabla s = 0 \tag{1.35a}$$

因此总能量的时间变化率为

$$\partial_t(\rho v^2/2 + \rho\varepsilon) = -\left(w + \frac{v^2}{2}\right)\nabla \cdot \boldsymbol{j}_m - (\boldsymbol{j}_m \cdot \nabla)\left(w + \frac{v^2}{2}\right) = -\nabla \cdot \left\{\boldsymbol{j}_m\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right\} \tag{1.36}$$

这就是"能流密度连续性方程",其在形式上也与质量连续性方程(1.31′)极为相似,只是其左端的 ε 在右端变成了 w。这一点的物理意义可阐明如下。

将(1.35)式在某体积内积分,并利用 Gauss 定理将体积分变为面积分,我们得到

$$\partial_t \int \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) dV = -\oint \left(\frac{v^2}{2} + w\right) \boldsymbol{j}_m \cdot d\boldsymbol{S} = -\oint \boldsymbol{j}_E \cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.37}$$

其中

$$\boldsymbol{j}_E \equiv \boldsymbol{j}_m\left(\frac{v^2}{2} + w\right) \tag{1.38}$$

称为能流密度矢(Poynting-Умов 矢)。在代入 w 的定义后,(1.36)式右端即化为

$$-\oint \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon\right) \boldsymbol{j}_m \cdot d\boldsymbol{S} - \oint p\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

第一项表示流体物质直接携带的动能和内能,而第二项表示流体施于该体积表面上的压力所做的功。这样(1.36)式的物理意义就十分明白:某体积中流体能量在单位时间内的减少等于单位时间内从该体积中流出的能量与压力所作功之和——能量守恒定律。

综上所述,流密度和连续性方程都是流体动力学中带有普遍性的概念。质量、熵和能量本身都是标量,而质量流密度(从另一意义来看也就是单位体积的动量) $\boldsymbol{j}_m = \rho\boldsymbol{v}$、熵流密度 $\boldsymbol{j}_s = s\boldsymbol{j}_m$ 和能流密度 $\boldsymbol{j}_E = \left(\frac{v}{2} + w\right)\boldsymbol{j}_m$ 都是矢量;动量本身是矢量,而其流密度由一二阶张量确定[(1.33)式]。这些流密度矢(张)量分别满足形式上极其相似的"连续性方程"[比较(1.31′)式、(1.35)式、(1.36)式和(1.30b)式]。

1.4.4　位势高度和 Coriolis 力

重力加速度 g 在描述大气行为中有其不可忽视的重要性。虽然在小范围内它一般可视为常数,但实际上它是纬度和高度二者的函数:以海平面上的值为准,它在两极的数值要比赤道上的值大将近 0.5%;而它对高度的依赖关系可写为

$$g(z) = \frac{g(0)}{[1 + (z/R_E)]^2} \tag{1.39}$$

在这里认为自转影响可以忽略，式中 $g(0)$ 为海平面上的值，R_E 为地球半径。

通常将上述依赖关系并入所谓的“位势高度”χ这样一个量之中，其定义为

$$\chi = \frac{1}{g_0}\int_0^z g(z)\mathrm{d}z \tag{1.40}$$

其中，g_0 是量纲为一的纲量，并取值为 9.8，以使χ在数值上与其所对应的几何高度相似，由于 g_0 为量纲一的量，所以χ的量纲就是单位质量的能量，从而其物理意义就是将一单位质量从地球表面提升到高度 z 时所应具有的势能。

地球表面并非固定于空间中，而是以角速度 Ω_E绕轴旋转着，对于波长很长的波动，就必须考虑这种由位于旋转地面上观察者的运动而产生的作用于运动物体（如气团）上的“表观力”或惯性力——Coriolis 力。这种力处处垂直于运动物体的速度并与之成正比，因而它只能改变物体的运动方向而不能改变其速率。

在固定于空间中的惯性坐标系中量度的一矢量（以下标 s 表示）与在旋转坐标系中量度的一矢量（以下标 r 表示）之间存在关系

$$(\mathrm{d}_t)_s = (\mathrm{d}_t)_r + \boldsymbol{\Omega}_E \times \tag{1.41}$$

以此很容易得到这两个坐标系中的速度关系

$$\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\Omega}_E \times \boldsymbol{r} \tag{1.42}$$

其中，$\boldsymbol{r}$ 是从地心到运动物体的矢径，$\boldsymbol{v}_r = (\mathrm{d}_t \boldsymbol{r})_r$；再利用一次(1.41)即得到加速度关系

$$\boldsymbol{a}_s = (\mathrm{d}_t \boldsymbol{v}_s)_r + \boldsymbol{\Omega}_E \times \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{a}_r + 2(\boldsymbol{\Omega}_E \times \boldsymbol{v}_r) + \boldsymbol{\Omega}_E \times (\boldsymbol{\Omega}_E \times \boldsymbol{r}) \tag{1.43}$$

其中，最后一项是离心加速度，而第二项就是我们感兴趣的 Coriolis 加速度。由于 $\Omega_E \approx 7.29 \times 10^{-5}$ rad/s，$R_E \approx 6370$km，于是离心加速度（基本上与 $\boldsymbol{g}$ 反向）的最大值 $\Omega_E^2 R_E \approx 3.38 \times 10^{-5}$ km/s$^2 \ll g$，因此在以后的讨论中总被略去。

被略去的还有 Coriolis 力的水平分量（所谓“传统近似”）；因为如果不这样做，解出的运动方程将表明：原来以水平方向出发的气流在 6 小时后会变为完全铅直方向，而这与实际发生的情况不符，实际气流是循着地球表面的球面运动的。另一方面，非常明显，Coriolis 力的铅直分量是纬度的函数，正是这种依赖关系构成了行星波的恢复力（参阅第 6 章第 4 节）。

1.5 大气波的类型

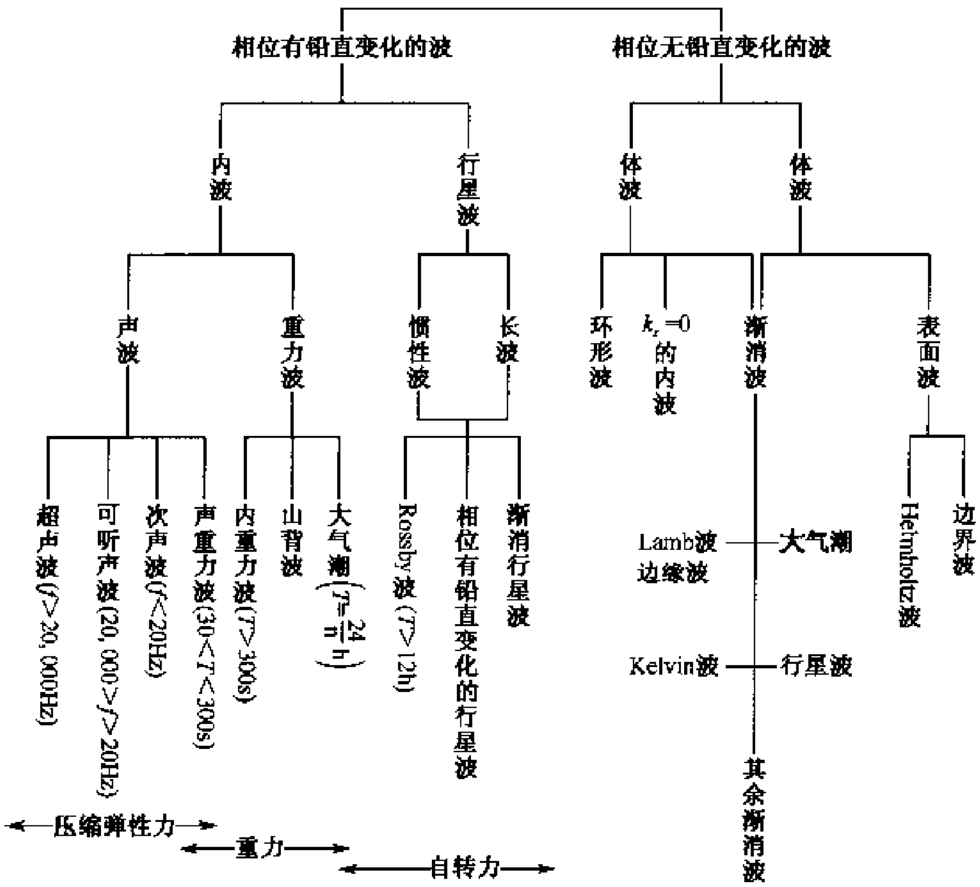
波动的特征是只将能量从一点传到另一点，而不使介质作为一整体产生任何永久的位移，从而波可看成是稳定、缓变背景下的扰动。对波动的数学分析称得上是人类综合能力最伟大的成就之一。不同类型的波都可归结为相应微分方程的解。

地球大气的特殊性表现为可压缩的、旋转的、充斥着密度梯度和温度梯度的球状流体，在其中可以包容大量波动现象，所有这些波（电磁波当然排除在外）都应当

成为广义的大气声学的研究对象。

所有这些大气波（总数超过 20 种，如表 I 所示①）可分解为三种基本型：水平传播但由铅直位移组成的铅直横波；水平传播而位移也在水平面内但垂直于传播方向的水平横波；传播与位移在同一方向的纵波。三种基本型示意地如图 6 所示[31]，所有大气波不是直接归属于它们，就是可以看成是由它们组合而成。

表 I　大气波系



在大多数情况下，这些波的存在形式是"叠加"在大气稳定状态上的微小扰动，因而服从线性化方程，也就是说，各种不同振幅、频率或波长的扰动可以叠加起来而不发生相互作用；反过来，一个波无论其形状如何复杂也可以被分解为规则的正弦分量（Fourier 分量）而便于进行分析。在波的进程中其振幅将衰减，然而在某些情形下，竟然也会增长，并最终达到非线性效应变得重要的地步，这时一个波与其他波以及其自身的相互作用就不再能忽略了。

大气波中最为人所知同时也是最重要的波就是本书研究对象的主体——声

① 该表基本上系采自文献[32]，其中一些主要者将在以下章节中或多或少地陆续提到。

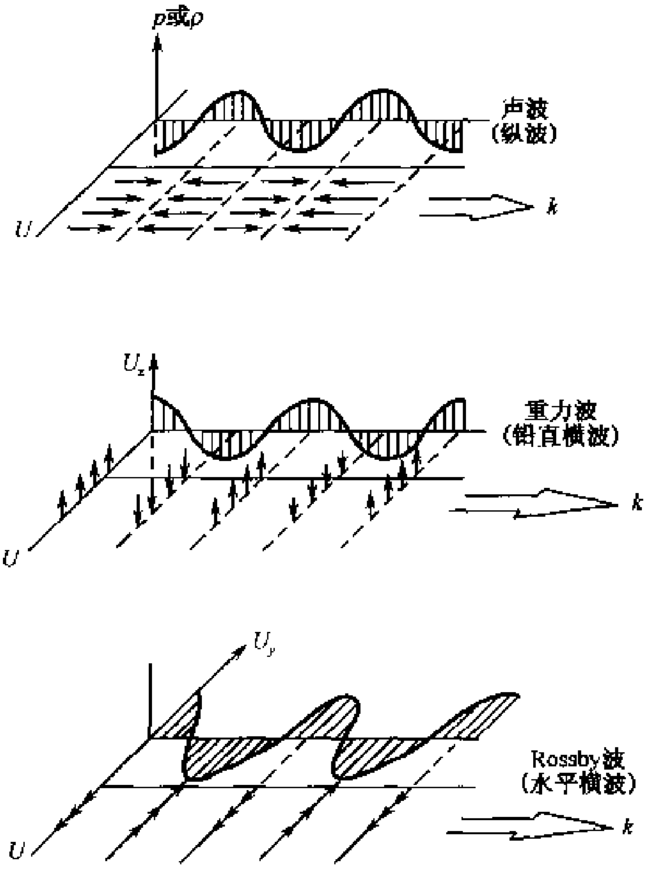


图6　大气波的三种主要类型

波。声波是流体的可压缩性(流体对改变其体积的一种反抗)与惯性(流体对改变其速度的一种反抗)之间的平衡而形成的纵波。在不存在外力的均匀、静止流体中,声波是可以存在的波的唯一形式。除寻常的可听声频声波外,大气中还大量存在人耳闻阈以下的次声波,而超声则由于衰减太快而只能存在于很小范围之内。

地球大气是一种处于重力连续作用之下的流体,其密度必然要随高度降低而形成梯度,这就赋予大气一种均匀流体中完全没有的稳定性。当大气密度梯度所引起的稳定化恢复力的量值可与寻常声波赖以传播的压缩恢复力相比拟时,结果所产生的波称为声重力波。这种波已不再是纯粹的纵波(除非是铅直传播时),因为重力会使空气粒子运动产生一横过传播方向的分量。

当上述的稳定化恢复力进一步加强,以致使大气中占支配地位的运动是由它所引起的时,就产生内重力波,其机制一如寻常存在于两种介质分界面上的(外)重力波,只不过这种重力波是存在于同一介质内部的"密度分层面"上而已。

通常引进 Froude 数 Fr 来作为重力重要性的一种量度。其定义为

$$Fr = |U| / \sqrt{gL}$$

其中U为一特征速度而L为一特征长度。在大气重力波情形下，可取风速为U，而取密度减小一半所需的高度为L。在$Fr \ll 1$的范围内流体静力学起作用，这时重力相对于压缩力占优势；反之，$Fr \gg 1$表示重力相形见绌的情况，大多数空气动力流和流体动力流都属于这一范畴。在声波的情况下$Fr>1$，对于声重力波$Fr \sim 1$而对于内重力波$Fr<1$。

除重力以外，地球的曲率和旋转也会对波动产生影响。众所周知，Coriolis 效应的强度随纬度而变化，正是这种变化形成又一外力场而产生一种波长非常之长(达数千 km)的水平横波，称之为行星波或依其发现者而命名为 Rossby 波。这种波的相速度总是指向西方，并且经常是指向与背景风相反的方向。因此这种波的概念最初是在气象方面用于解释盛行西风带，并且帮助建立起一种理论来描述与移动的波状高压系和低压系相联系的压力分布。

大气中也可发生切变波，特别是在物理性质不同的二相邻气团的分界面(称为“锋”)上切变波尤为重要。

大气切变流总是不稳定的，任一常规波动由于非线性效应而卷起形成离散的涡旋。波长比 Rossby 波小得多的内重力波和表面重力波都可形成不稳定的涡旋。一种重要的典型情况是切变流在山的背风方生成的重力波，即所谓山背波，在第 8 章中将较详细地研究之。

周期为太阳日或太阴日约数的大气运动称为大气潮。与主要由月球引力产生的海潮不同，大气潮主要由太阳的热效应引起，而月球和太阳的引力效应较为次要。另外一个不同之处是：海潮可以由测量水面高度的变化来精确计量，由于大气没有这样一个明确的边界因而不能如此来测量。一个可供选择的办法是在大气“海洋”的底部用气压计来观测。空气的铅直加速度非常小，所以气压计可以有效地测出覆盖于其上的空气重量。因此平均值以上的气压计读数就意味着高潮，而平均值以下的读数就与低潮相对应。

大气潮和大气重力波有一个重要的共同点，即它们的振幅都是按$\rho^{-\frac{1}{2}}$随高度增加的，这是能量守恒的直接推论。如以A表示波幅，则其动能$\rho A^2/2$应保持常值。在实际大气中密度ρ几乎是随高度指数性减小，因而A就应相应地增加。这种“向上放大”现象表明：在高层大气中必定存在非常可观的风速分量，只要这些波实际上能够传播到这样的高度。而事实上这两类波的确存在于电离层高度(60～500km)。大气潮风还会使地球磁场发生小尺度的变化，这是由于它使组成电离层的带电粒子产生运动，从而产生电场和电流(发电机效应)，而最终产生磁场的小尺度变化，量级约为原场强的 4 万分之一。

由于地球物理上许多重要的力(如重力和 Coriolis 力等)都有特定的方向，所以在地球大气中传播的波应当是各向异性的，即波的性质在各个方向不一样。另一方面，这些波又都是频散的，即波频率依赖于波长(或波数)。一般频散可以由两

种截然不同的效应造成：一是起源于“结构”而仅依赖于介质的性质；另一则起源于“几何”，由在介质边界上反射时的干涉效应造成。大气波的频散属于前者，而与大气本身所具有的内在共振频率有关，对于重力波，就是 V-B 共振频率；对于声波，就是声共振；对于行星波就是由于旋转流体中的旋进而形成的回旋共振。频散的后果之一是使能流方向（群速度）与相位传播方向（相速度）不一致。

第 2 章　基本概念和处理方法

声波的发生和传播总是同一定的介质相关联的，而我们这里有兴趣的介质就是大气。正如在第 1 章中所指出的，大气是一种非常复杂的介质，在分析中不可能同时考虑所有这些复杂性，因此作为基础的第一步，我们考虑大气的理想化模型：首先略去地球的曲率和旋转，即假定大气是“平”的和无旋转的；其次假定除声波本身引起的运动以外大气是静止的（无风）、无损耗的和均匀的；最后，我们目前只考虑频率足够高的声波，以致重力影响完全可以忽略。这样，大气就是一种理想的气体介质，而寻常的波动方程完全可以适用。

推导基本的波动方程的出发点就是第 1 章中所述的流体动力学的三个基本方程，同时选取压力 p、密度 ρ 和运动速度 $\boldsymbol{v}$ 来描述大气状态。

当大气中存在波动时，这三个量（以及其余相关的量）都会受到相应的扰动而变为

$$p \to p_0 + p_1, \quad \rho \to \rho_0 + \rho_1, \quad \boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 \tag{2.1}$$

其中下标 0 表示对应于静态的量而下标 1 表示对应于声波引起的微扰量，在本章中如上文所述是假定 $\boldsymbol{v}_0 = 0$ 的。在小振幅情况下，微扰量的二次方项均可忽略从而导致有关方程的线性化。

2.1　均匀大气中的波动方程

2.1.1　波动方程的推导

从原则上讲，流体动力学基本方程组（1.30）～（1.32）应当完整地描述包括声波在内的流体运动，可是在普遍形式下它们都是非线性的，因而实际上分析起来非常困难；在小振幅声波情形下，由于可进行线性化处理，就可用初等消去过程将它们“统一”为单一的波动方程。

以声波扰动（2.1）式代入方程（1.30a）、（1.31′）和（1.32），考虑到现在 $\boldsymbol{v}_0 = 0$ 并略去二阶小量后，即分别得到

$$\partial_t \boldsymbol{v}_1 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \tag{2.2}$$

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0 \tag{2.3}$$

$$\partial_t p_1 = c^2 \partial_t \rho_1 \tag{2.4}$$

在这三个方程中进行初等的消去过程，就可以分别得到关于声压 p_1、密度扰动 ρ_1

和粒子速度$\boldsymbol{v}_1$ 的波动方程。例如，以(2.4)式代入(2.3)式即得

$$\frac{1}{c^2}\partial_t p_1 + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0 \tag{2.5}$$

将上式取时间微商后再与对(2.2)式取散度后得到的式子消去$\boldsymbol{v}_1$，即得到关于 p_1 的波动方程：

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 p_1 \tag{2.6}$$

将(2.4)式直接代入(2.6)式，立即得到关于ρ_1 的波动方程

$$\nabla^2 \rho_1 = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \rho_1 \tag{2.7}$$

至于声波引起的粒子速度，则情况有所不同：在一维情形下很容易直接看出，它是满足波动方程的；而在三维情形下，则仅由于声波是“无旋运动”才能导出这一方程。将(2.2)式对时间求微商后再借助于(2.5)式以消去 p_1，即得

$$\partial_t^2 \boldsymbol{v}_1 = c^2 \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1)$$

利用矢量分析中熟知的公式$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1) = \nabla^2 \boldsymbol{v}_1 + \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{v}_1$ 便知，当$\nabla \times \boldsymbol{v}_1 = 0$(无旋)时，即得到关于$\boldsymbol{v}_1$ 的波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \boldsymbol{v}_1 \tag{2.8}$$

从现在起，为简明起见，我们在不致引起混淆的情况下一律略去与声波有关各量的下标“1”。

2.1.2　速度势(声势)、计及二阶微量的波动方程

根据“无旋必有势”的原则，$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ 就意味着速度势(声势)的存在(因为任一标量梯度的旋度恒等于 0)①：

$$\boldsymbol{v} = -\nabla\phi \tag{2.9}$$

引进声势后就可将 Euler 方程(2.2)的三个分量方程合并成一个

$$\nabla p = -\rho_0 \partial_t v = \rho_0 \nabla(\partial_t \phi)$$

从而避免了通常求解矢量微分方程所遇到的困难。将上式积分后即给出下列重要关系：

$$p = \rho_0 \partial_t \phi + p_0 \tag{2.10}$$

由此可见，不仅粒子速度的三个分量，而且声压也可用简单的微分运算从声势导出。将(2.10)式引入(2.6)式、对时间积分并舍去无关紧要的积分常数之后，即得到关于声势的波动方程

---

① 负号没有特别的意义，它只是为了以后的某些方便而规定：等势面的数值增长方向与 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反。

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi \tag{2.11}$$

这样，声场就只由坐标的一个标量函数描述。

波动方程(2.11)是只精确到一阶量的线性化方程。如以(2.9)式和(2.1)式代入未作线性化处理的 Euler 方程(1.30a)，略去三阶微量 $\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$，经过若干变换并积分之后，代替(2.10)式，我们得到计及二阶量的声压表达式

$$p = \rho_0\partial_t\phi - \frac{1}{2}\rho_0\left[|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{c^2}(\partial_t\phi)^2\right] \tag{2.10a}$$

其中略去了积分常数，再利用状态方程(2.4)和连续方程(2.3)，重复本节第一段中所作过的消去过程，最后即可得到计及 p 和 $\boldsymbol{v}$ 的二阶量的波动方程

$$\partial_t^2\phi - \frac{1}{2}\partial_t\left[|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{c^2}(\partial_t\phi)^2\right] = c^2\nabla^2\phi \tag{2.11a}$$

由此可见，即使在忽略黏性和导热性等二阶效应的情形下，二阶量也对简单的波动方程(2.11)作出修正。

2.1.3 Helmholtz 方程

对许多声现象的描述都可通过对描述该现象的函数及其所由定义的方程进行 Fourier 积分变换而得到显著简化。Fourier 时间和空间变换及它们的逆变换由下列积分定义：

$$F(\boldsymbol{x},k) = F_t f(\boldsymbol{x},t) = (2\pi)^{-1}c_0\int dt\exp(ikc_0t)f(\boldsymbol{x},t) \tag{2.12a}$$

$$f(\boldsymbol{x},t) = F_t^{\dagger}F(\boldsymbol{x},k) = \int dk\exp(-ikc_0t)F(\boldsymbol{x},k) \tag{2.12b}$$

$$F(\boldsymbol{\kappa},t) = F_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x},t) = (2\pi)^{-3}\int d^3x\exp(-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x},t) \tag{2.13a}$$

$$f(\boldsymbol{x},t) = F_{\boldsymbol{x}}^{\dagger}F(\boldsymbol{\kappa},t) = \int d^3\boldsymbol{\kappa}\exp(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{\kappa},t) \tag{2.13b}$$

其中，$\boldsymbol{x}=(x,y,z)$为空间坐标，$\boldsymbol{\kappa}$ 为空间 Fourier 坐标(空间波矢)；在直坐标下，所有积分均为从$-\infty$到$+\infty$；上标“†”表示函数或算符之复共轭。当 c 在时间上为常数或为缓变函数(相对于声波周期)时，对波动方程(如(2.6)式)应用(2.12a)式中的 Fourier 算符即可将其转换为 Helmholtz 方程：

$$\nabla^2P + k^2P = 0 \tag{2.14}$$

其中，P 表示声压 p(或相应的与声波相关联的其他物理量)的 Fourier 变换，$k(=\omega/c)$为波数。Helmholtz 方程也可从另一角度导出，只要假定波动的时间依赖关系是正弦式的(纯周期性过程)，以致可将时间因子 $e^{-i\omega t}$($\partial_t=-i\omega$)分离出去，例如以 $p=P(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$代入(2.6)式，即得到关于声压中只依赖于空间坐标那部分的方程，或即方程(2.14)。由于任何过程都可用 Fourier 分析分解为一系列正弦过

程，所以上述两种推导是统一的。

由于独立变量的数目减少了一个，Helmholtz 方程的优越性是很明显的，以致它经常成为线性声学分析的出发点。

顺便指出，在纯周期性过程中，声势可用只差一虚常数的声压来代替，因而粒子速度可直接以声压表出，避开了引入物理上不感兴趣的 ϕ 这个量的必要性。这时由(2.10)式和(2.9)式分别得到("～"表示周期性的量)：

$$\tilde{p} = -\mathrm{i}\omega\rho_0\tilde{\phi} \tag{2.15}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = -(\mathrm{i}/\omega\rho_0)\,\nabla\tilde{p} \tag{2.16}$$

2.2　声波中的能量关系

2.2.1　声波能量、声能流密度

在第 1 章第 4.3 节中已指出，流体单位体积的总能量为 $\rho\varepsilon+\frac{1}{2}\rho v^2$。当声波进入静止流体之后，后者的密度和内能分别得到扰动：$\rho\to\rho_0+\rho_1$，$\varepsilon\to\varepsilon_0+\varepsilon_1$，代入后按 Taylor 级数展开，精确到二阶项，我们有

$$\rho_0\varepsilon_0+\rho_1\partial_\rho(\rho\varepsilon)+\frac{\rho_1^2}{2}\partial_\rho^2(\rho\varepsilon)+\frac{\rho_0}{2}v^2$$

由于声波为绝热过程，应在熵为常数的条件下求微商。根据热力学第二定律，$\mathrm{d}\varepsilon=T\mathrm{d}s+\frac{p}{\rho^2}\mathrm{d}\rho$，有 $(\partial_\rho(\rho\varepsilon))_s=\varepsilon+\frac{p}{\rho}=w$，$(\partial_\rho^2(\rho\varepsilon))_s=(\partial_\rho w)_s=(\partial_p w)_s(\partial_\rho p)_s=\frac{c^2}{\rho}$，故流体中单位体积的能量就是

$$\rho_0\varepsilon_0+w_0\rho_1+\frac{c^2}{2\rho_0}\rho_1^2+\frac{\rho_0}{2}v^2$$

其中，第一项表示静止流体的内能，与声波无关；而第二项表示的是由于单位体积内流体质量的变化而引起的能量变化，如对流体整个体积积分，则在所得到的总能量中不会出现对应于这一项的变化，因为流体的总量并没有改变，即 $\int\rho_1\mathrm{d}V=0$，其物理涵义就是：声波所引起的"稠密"和"稀疏"在整个流体中相互抵消；因此，由于声波的存在而导致的流体总能量的改变应为

$$\int\left(\frac{\rho_0 v^2}{2}+\frac{c^2\rho_1^2}{2\rho_0}\right)\mathrm{d}V$$

其被积函数可看成是声能密度，利用(2.4)式和声速与流体压缩系数 $\kappa\left(=\frac{1}{\rho}\partial_p\rho\right)$ 之间的关系 $c=\left(\frac{1}{\kappa\rho}\right)^{1/2}$ 将 ρ_1 换为 p_1，则又可将其写成更为对称的形式

$$E=\frac{1}{2}\rho_0 v^2+\frac{c^2}{2\rho_0}\rho_1^2=\frac{1}{2}\rho_0 v^2+\frac{1}{2}\kappa p_1^2 \tag{2.17}$$

其第一项显然表示动能密度，而第二项是由于流体的压缩性（弹性）所制约的势能密度。

将(1.38)式应用到声波情形，略去三阶微量，声波中的平均能流密度是

$$\rho_0 \boldsymbol{v} w=w_0\,\rho_0\boldsymbol{v}+\rho_0\overline{w_1\boldsymbol{v}}$$

其中 w_0 为流体未被扰动前单位质量的焓，而 w_1 为声波引起的焓的扰动值。对于后者，我们有

$$w_1=\partial_p(w)_s p_1=\frac{p_1}{\rho_0}$$

将此结果代入上式并积分，即得到通过某给定表面的总能流

$$\oint(w_0\,\overline{\rho_0\boldsymbol{v}}+\overline{p_1\boldsymbol{v}})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由于给定体积中流体的总量平均来说是不变的，所以通过闭合表面的质量流的时间平均值为 0，因此声能流就等于

$$\oint\overline{p_1\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由此可引进声能流密度矢

$$\boldsymbol{I}=p_1\boldsymbol{v} \tag{2.18}$$

求(2.17)式对时间的微商，并利用(2.2)式、(2.3)式和(2.4)式等关系式，容易证明

$$\partial_t E+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{I}=0 \tag{2.19}$$

上式实际上描述了声能守恒定律。

2.2.2 声波动量、声压的时间平均值

以(2.1)式代入(1.34a)式，再利用(2.4)式和(2.18)式，我们求得声波中单位体积的动量：

$$\boldsymbol{j}_m=\rho_0\boldsymbol{v}+\frac{1}{c^2}\boldsymbol{I}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{I}-\rho_0\boldsymbol{\nabla}\phi \tag{2.20}$$

求上式之体积分即得到声波的总动量。但由于

$$\int\boldsymbol{\nabla}\phi\mathrm{d}V=\oint\phi\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

因为在声波所占体积（波包）之外 $\phi=0$，所以声波的总动量为

$$\int\boldsymbol{j}_m\mathrm{d}V=\frac{1}{c^2}\int\boldsymbol{I}\mathrm{d}V \tag{2.21}$$

由此得出结论：声波包的传播过程伴随着流体物质的转移，由于 $\boldsymbol{I}$ 为一二阶微量，所以这是一种二阶效应。

在一级近似下(即相当于线性化运动方程的情形),声压 p_1 是一个周期性地改变符号的量,故其平均值为 0;但在高级近似下,这一结论不成立。如果只限于二阶微量,p_1 可用根据线性化方程计算出来的量表出,而无需直接求解计入高阶量的非线性方程。

将(2.9)式代入 Euler 方程(1.30a″),便得到

$$\nabla\left(-\partial_t\phi+\frac{v^2}{2}+w\right)=0$$

由此得到绝热、具势(声波正是这种情形)运动下 Euler 方程的一次积分(Lagrange 积分)

$$-\partial_t\phi+\frac{v^2}{2}+w=C(t) \tag{2.22}$$

此即为“广义的”Bernoulli 方程①。

将(2.22)式按时间取平均。$\partial_t\phi$ 的时间平均值为 0(只要 $\phi(t)$ 对于所有的 t 均为有限的),代入 $w=w_0+w_1$ 并将 w_0 并入右端常数项内,即得

$$\overline{w_1}+\frac{\overline{v^2}}{2}=\text{const}$$

只要流体中存在哪怕极其微小的吸收,与声波有关的量 v、w_1 等在无限远处均应为 0,由此应令上式中的 const=0

$$\overline{w_1}+\frac{\overline{v^2}}{2}=0 \tag{2.23}$$

然后按 p_1 的幂将 w_1 展开,精确到二阶项:

$$w_1=(\partial_p w)_s p_1+\frac{1}{2}(\partial_p^2 w)_s p_1^2=\frac{p_1}{\rho_0}-\frac{p_1^2}{2\rho_0^2}(\partial_p\rho)_s=\frac{p_1}{\rho_0}-\frac{p_1^2}{2\rho_0^2c^2}$$

代入(2.23)式后即得到所要求的声压平均值

$$\overline{p_1}=-\frac{\rho_0}{2}\overline{v^2}+\frac{\overline{p_1^2}}{2\rho_0c^2}=-\frac{\rho_0}{2}\overline{v^2}+\frac{c^2}{2\rho_0}\overline{\rho_1^2} \tag{2.24}$$

可见为一二阶微量。

相应地,对于声波引起的密度起伏,也可写出其平均值:

$$\overline{\rho_1}=(\partial_{p_0}\rho)_s\overline{p_1}+\frac{1}{2}(\partial_{p0}^2\rho)_s\overline{p_1^2}, \tag{2.25}$$

---

① 不同于一般涵义下的 Bernoulli 方程,后者成立于定常流情形,而可由 $\partial_t v=0$ 的(1.30a″)式一次积分求出为 $v^2/2+w=C$,这里 C 为沿每一给定流线上的常数,在不同流线上取不同的值。但(2.22)式中的 $C(t)$ 为时间函数,而在整个流体范围内为常数。

2.2.3 声波中的 Lagrange 密度①

以上推导都是以牛顿式运动方程为基础的，如果应用分析力学的概念和方法，许多结果(特别是关于能流密度和动量流密度的)可以更简洁地得到。

某系统的 Lagrange 密度，即单位体积的 Lagrange 函数 L(动势)，定义为动能密度与势能密度之差。按照 Hamilton 原理，该系统的真实运动应使 L 对时间的积分(Hamilton 作用量 $\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t$)为极值(在绝大多数情形下为极小值)，即 $\delta\int L\mathrm{d}t = 0$，由此得出 Lagrange 形式的运动方程为②

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_z}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0 \tag{2.26}$$

对声波来说，参照(2.17)式，我们有

$$L=\frac{1}{2}\rho_0 v^2-\frac{1}{2}\kappa p_1^2 \tag{2.27}$$

为了将 Hamilton 原理应用于此，必须将 v 和 p_1 用坐标 x 和时间 t 的某一共同函数表示出，而声势 ϕ 恰恰是最适当的这种函数，以(2.9)式和(2.10)式代入(2.27)式即得

$$L=-\frac{1}{2}\rho_0\left[|\nabla\phi|^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\right]=-\frac{1}{2}\rho_0\left[\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2-\frac{1}{c^2}\phi_t^2\right] \tag{2.28}$$

在上式中我们不得不改变 L 的符号，这是由于这一表达方式的某种“反常”性质——ϕ 的空间微商对应于动能项而时间微商对应于势能项。

将(2.28)式应用于(2.26)式便得出波动方程(2.11)。由此可见，波动方程实际上对应于下述要求：针对一定的初始条件和边界条件，平均来说，系统的总动能与总势能之差应尽可能地小。这一结果很具启发性并且很有用，由此可推出许多别的关系。

由于(2.27)式中的势能密度项只精确到二阶量(因所用的 p_1 表达式是只精确到一阶量的(2.10)式)，所以(2.28)式中的 L 也只精确到二阶量。如果采用计及二阶量的 p_1 表达式(2.10a)(在现在的符号下可写为 $p_1=\rho_0\phi_t+L$)并考虑到三阶量，则(2.28)式成为

$$L^{(1)}=\left[1+\frac{1}{c^2}\phi_t\right]L \tag{2.29}$$

以之代入(2.26)式，则最后得到的是修正到二阶量的波动方程(2.11a)。有趣的

① 更详细的讨论可参阅文献[33]。

② 在这里(仅仅只限于本小节中)我们引进另一种符号系统，一方面恢复对偏微商的传统表示法，如$\partial/\partial t$，$\partial/\partial x$(前此是用∂_t，∂_x来表示的)等；另一方面仍然保留以下标表示对该量的偏微商，如 $\phi_t\equiv\partial\phi/\partial t$，$\phi_x\equiv\partial\phi/\partial x$ 等。

是，修正项与未加修正的 L 的时间微商成正比：$\frac{1}{\rho_0}L_t$。

众所周知，当系统的总能量(动能与势能之和)用正则变量来表示时，它就是该系统的 Hamilton 函数。在声学情形，对应的正则坐标是 ϕ 从而正则动量是$\partial L/\partial\phi_t$(由(2.28)式看出它等于$\frac{1}{c^2}p_1$)。由于 ϕ 不但依赖于参量 t 并且还依赖于坐标 $\boldsymbol{x}$，所以这里的情形比一般分析力学中的更为复杂；也就是说，动量、场和场的梯度之间的相互关系比一般的 Hamilton 正则方程所给出的更为复杂。在分析力学中已证明：质点的能量是一四元矢的时间分量，而它的空间分量与质点的动量成正比。推广到声学情形，可引进一"四元并矢"$\mathfrak{W}$，其分量为

$$W_{ij} = \phi_{x_i}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{x_j}}\right) - L\delta_{ij} \tag{2.30}$$

其中，δ_{ij} 为单位张量；$x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=\mathrm{i}ct$。

容易看出，其时间-时间分量就是 Hamilton 密度 H：

$$W_{44} \equiv W_{tt} = \phi_t\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_t}\right) - L = H \tag{2.31}$$

以(2.28)式代入后即可看出它就是由(2.17)式所定义的声能密度 E。

而三个时间-空间分量组成一三元矢，如其 x 分量为

$$W_{tx} = \phi_t\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_x}\right) = -\rho_0\phi_t\phi_x = p_1 v_x$$

这正是(2.18)式所定义的声能流密度矢 $\boldsymbol{I}$。由于声压与粒子速度的乘积表示的是声波所引起的单位面积的功率通量，所以 $\boldsymbol{I}$ 亦称为声强。

再来看四元并矢 $\mathfrak{W}$ 的空间-时间分量，如其 x 分量为

$$W_{xt} = \phi_x\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_t}\right) = \frac{\rho_0}{c^2}\phi_x\phi_t = -\frac{1}{c^2}p_1 v_x = -\frac{1}{c^2}W_{tx}$$

由此组成声波动量密度矢[对比流体的动量密度矢 $\boldsymbol{j}_m=\rho\boldsymbol{v}$((1.34a)式)]：

$$\boldsymbol{M} = -\frac{1}{c^2}p_1\boldsymbol{v} = -\frac{1}{c^2}\boldsymbol{I} \tag{2.32}$$

由于$\frac{1}{c^2}$一般很小，所以这是一二阶微量，它满足类似于(1.30b)式的矢量连续性方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}M_i = -\frac{\partial}{\partial x_k}\mathfrak{W}_{ik} \tag{2.33}$$

其中的 $\mathfrak{W}_{ik}$ 为一由 $\mathfrak{W}$ 的九个空间-空间分量组成的张量(声波应力张量)，为声波中动量通量的量度

$$\mathfrak{W}_{ik} = \begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

其中

$$W_{xx}=\phi_x\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_x}\right)-L=\frac{\rho_0}{2}(-v_x^2+v_y^2+v_z^2)-\frac{\kappa}{2}p_1^2$$

$$W_{xy}=\phi_x\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_y}\right)=-\rho_0 v_x v_y$$

…(余类推)

顺便可以指出

$$cM=-\frac{1}{c}I \tag{2.35}$$

这个量就是声波的辐射压。

2.3 不均匀大气中的波动方程

2.3.1 波动方程和定解条件

实际大气总是不均匀的，这意味着波动方程(2.6)式中的 c 或 Helmholtz 方程(2.14)式中的 k 都是坐标的函数。在谐波情形下，这种方程可从流体动力学方程组直接推出。这时我们从(1.30a′)式和(2.5)式出发，注意其中的 ρ_0 和 c 均为坐标 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ 的函数。由于 $\partial_t=-i\omega$，在此二方程中消去 $\boldsymbol{v}$，即得

$$\rho_0\nabla\cdot[(1/\rho_0)\nabla p]+k^2p=0$$

或展开后得

$$\nabla^2p+k^2p-(1/\rho_0)\nabla\rho_0\cdot\nabla p=0 \tag{2.36}$$

用按如下定义的新函 ψ 来代替 p[34]：

$$\psi=\rho_0^{-1/2}p \tag{2.37}$$

经简单变换之后即得到关于 ψ 的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2\psi+K^2(\boldsymbol{x})\psi=0 \tag{2.38}$$

其中

$$K^2=k^2+(1/2\rho_0)\nabla^2\rho_0-(3/4)[(1/\rho_0)\nabla\rho_0]^2 \tag{2.39}$$

当密度 ρ_0 在一波长范围内变化很小时，上式中之第二项和第三项皆可略去。

众所周知，为使描述一定物理过程的微分方程的解确定，还须给出相应的定解条件，即初始条件和边界条件。

初始条件就是初始时刻($t=0$)系统状态的描述，比较简单，而且对于稳态谐和过程来说根本无需初始条件。边界条件则是描述边界对波场的响应，即在边界所处物理条件下，波函数 ψ 在边界 S 上所应满足的确定关系，从而规定了整个波场(不仅限于界面上)的性质。常用的边界条件可分为如下几种：

(1)理想的绝对软界面，不能承受任何压力，即在界面 S 上

$$p|_S = 0 \tag{2.40}$$

称为第一类边界条件，实用上可用于大气与水面的边界上。

(2)理想的绝对硬界面，不能容许任何法向粒子速度，即

$$v_z|_S = 0, \quad 或\partial_z p|_S = 0 \tag{2.41}$$

称为第二类边界条件，实用上可用于非常坚硬的地面。

(3)阻抗边界条件，即在界面 S 上满足一定的阻抗关系①：

$$\left.\frac{p}{v_z}\right|_S = Z_S \tag{2.42}$$

称为第三类边界条件，可视为第一类(相当于 $Z_S=0$)和第二类(相当于 $Z_S\to\infty$)边界条件的中间情形，因而最富于实用意义。

在一般情况下，Z_S不但与界面 S 下方介质参数(如密度 ρ 和声速 c)有关，而且还与下介质中声场本身特性(如入射角 θ)有关，这样，由于 Z_S本身不能作为事先已知的确定量给出，也就不能简单地作为定解条件了；但当 Z_S与角度 θ 无关时，表面上每一点处的法向速度就完全取决于该点处的声压值，而与他处的值无关，这样的表面称为"局部反应表面"②，以后会经常遇到。

除边界条件之外，如声场涉及无限远处，则定解条件中还应包括场在无限远处趋于 0(熄灭)的所谓"辐射条件"。

2.3.2　存在解的概述

由上述可见，大气声学的许多基本问题即归结为在相应定解条件下求解 Helmholtz 方程(2.38)。如认为波的入射平面同 xz 平面重合，则 ψ 只是 x 和 z 这两个变量的函数，再用分离变量法寻求如下形式的解：

$$\psi(x,z) = \Psi(z)\exp i\xi x, \xi = k_0\sin\theta_0 \tag{2.43}$$

对于新函数 $\Psi(z)$，以(2.43)式代入(2.38)式而得到

$$\Psi'' + [K^2(z) - \xi^2]\Psi = 0 \tag{2.38a}$$

撇号表示对变量 z 的微商在其中已假定了大气的水平分层特性，因而 $K^2(x)$就简化为 $K^2(z)$.

在数学上，(2.38a)型的二阶常微分方程的解对应于相应的特殊函数，而仅当 $K^2(z)$取某些特定形式时才对应有已知函数的封闭形式解或有现成函数表可查的解。截至目前，这样的"严格可解情况"总数不超过 10 种[35]，现分别简述如下：

---

① 当然，(2.42)式也可以写为 $p|_S - Z_S v_z|_S = 0$，它与(2.40)式和(2.41)式并称为齐次边界条件，如果这三个式子的右端都不是 0，而分别是压力、粒子速度(以及二者的线性组合)的某些分布，则得到非齐次边界条件。

② 这种表面的形成机制可以是下介质中声速远小于上介质中者；也可以是下介质具有强烈的吸收或各向异性等，如"梳状表面"。进一步的讨论见第 3 章第 7.3 节。

(1) $K^2(z)=k_0^2(1+az)$

这种最简单而又很重要的线性情况，可由 Airy 函数（关于其性质下文还将较详细地讨论）来求解。

(2) $K^2(z)=k_0^2(1+az)^m$

在任意的 a 和 m 下曾对正入射（$\xi=0$）的情况研究过[36]；而当 m 为整数时则对任意的入射角（$\xi=0\to k_0$）下平面波的情形研究过[37,38]。

(3) $K(z)=\dfrac{k_0 a}{z+d}$

正入射情况早由 Rayleigh 研究过[39]。在作代换 $z+d=\xi$ 后，(2.38a)式（其中 $\xi=0$）的解具有形式

$$\Psi = A\xi^{\frac{1}{2}\pm im}, m^2 = (k_0 a)^2 - \frac{1}{4}$$

(4) $K^2(z)=k_0^2\left(a^2-\dfrac{b^2}{z^2}\right)$

这时(2.38a)式有两个线性独立解[40]

$$z^{1/2}H_p^{(1)}(\beta z) \text{ 和 } z^{1/2}H_p^{(2)}(\beta z)$$

其中

$$p = \left(k_0^2b^2 + \frac{1}{4}\right)^{1/2}, \beta^2 = k_0^2a^2 - \xi^2$$

Rayleigh 所讨论过的情况(3)可看成是这里的 $a=0$ 的特殊情形。

(5) $K^2(z)/k_0^2=1-P(z)$

$$P(z) = c_2z^2 + c_3z^3 + c_4z^4 + \cdots$$

在一系列变换之后，这时的(2.38a)式可用抛物柱面函数[41]来求解[42]。值得指出的是，如在 $P(z)$ 的多项式中只取第一项 c_2z^2，则当 $c_2>0$ 时即得到谐振子的 Schrödinger 方程；而当 $c_2<0$ 时则在文献[43]中与大气中无线电落地波导理论联系起来研究过，这对声波波导传播理论很可借鉴。

(6) $K^2(z)/k_0^2=1-N\dfrac{e^{mz}}{1+e^{mz}}-4M\dfrac{e^{mz}}{(1+e^{mz})^2}=n^2(z)$

这一以 Epstein 剖面著称的情形系由最初借以研究电磁波反射问题[44]的学者而得名。因折射率平方 $n^2(z)$ 的分布情况而可分为对称层（$N=0, M\neq0$）和过渡层（$N\neq0, M=0$），其解可用超几何（超比）函数来表达[41]。在文献[45]、[46]中有对推广的 Epstein 剖面的讨论。

(7) $K(z)=k_0e^{az}$

在代换 $v=\dfrac{k_0}{a}e^{az}$ 下，(2.38a)式可利用圆柱函数 $H_q^{(1)}(v)$ 和 $H_q^{(2)}(v)$ 来解，这里 $q=(k_0\sin\theta)/a$[47,48]。

(8) $K(z)=\dfrac{(z^2-a^2)^{1/2}}{c_0 z}$

这时(2.38a)的解可用 Bessel 函数表示出[49]。

(9) $K^2(z)/k_0^2=p^2+(1-p^2+q)\mathrm{e}^{-az}-q\mathrm{e}^{-2az}$

这时(2.38a)的解可用 Whittaker 函数 $M_{k,\mu}$ 和 $W_{k,\mu}$[41]表示[50]。

最后需要指出的是，在某些情况下，尽管(2.38a)式不能像上列各种情形中那样直接求得严格的封闭形式解，但可通过一些适当变换使它的解与另一可解情况相联系[51,52]。

综上所述，在非均匀大气(介质)中寻求波动方程(Helmholtz 方程)的严格解受到很大局限：首先是只有在某些特定剖面下才能得到，而实际情况一般不一定能满足这些特定剖面；其次是即使求得严格解，由于它们大多是一些高级超越函数，其物理图像不易清晰看出。因而在许多实际情况下，不得不依赖于近似解和数值解，关于后者，将列专章讨论。

2.4　WKB 近似①

近似法中最重要的当首推 WKB(Wentzel-Kramers-Brillouin)近似或几何光学近似。

2.4.1　一般表述

首先讨论波在 z 轴方向传播这一最简单情形，这时(2.38a)式中的 $\xi=0$ 而令 $K(z)=k_0 n(z)$，其中 $k_0=\omega/c_0$，c_0 为任一 $z=z_0$ 处的声速，而 $n(z_0)=1$，于是有

$$\psi''(z)+k_0^2 n^2(z)\psi(z)=0 \tag{2.38b}$$

在均匀大气中 $n(z)=1$，而(2.38b)式的解就是指数式 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k_0}$；而在不均匀情形下可以期望解具有形式

$$\psi=\exp[\mathrm{i}k_0 M(z)] \tag{2.44}$$

其中，$M(z)$ 为一须以 $1/k_0$(在此假定频率 ω、从而 k_0 充分大，而关于"充分"的判据见下文)的幂级数形式求出的函数，现令

$$M(z)=\int_{z_0}^{z}\mathrm{d}z\sum_{\nu=0}^{\infty}y_\nu(z)/k_0^\nu \tag{2.45}$$

代入(2.38b)式后令 k_0^2、k_0 和 k_0^0 的系数相等，相继求得

$$y_0=\pm n,\ y_1=\mathrm{i}(\ln n^{1/2})',\ y_2=\pm\frac{1}{2}n^{-1/2}(n^{-1/2})''$$

① 深入的讨论可参阅有关专著，如文献[53]。

只取级数中开首三项并注意到 $n(z_0)=1$，即从(2.45)式和(2.44)式求得

$$\psi = n^{-1/2}\exp\left[\pm \mathrm{i}k_0\int_{z_0}^{z}(1+\varepsilon)n\mathrm{d}z\right] \tag{2.46}$$

其中

$$\varepsilon \equiv n^{-3/2}(n^{-1/2})''/2k_0^2 \tag{2.47}$$

在条件

$$y_2/k_0^2 \ll y_1/k_0 \ll y_0$$

或

$$\varepsilon \ll 1,(\lambda_0^2/2\pi n^2)n' \ll 1 \tag{2.48}$$

成立时，所得结果与精确结果相差不大，而在(2.46)式中认为 $\varepsilon=0$ 的表式即取为WKB 近似

$$\psi = n^{-1/2}\exp\left[\pm \mathrm{i}k_0\int n(z)\mathrm{d}z\right] \tag{2.46'}$$

显然这时必须满足条件

$$k_0\int_{z_0}^{z} n\varepsilon\,\mathrm{d}z \ll 1 \tag{2.49}$$

这个条件(限制了 n 的二阶微商和差值 $z-z_0$)连同(2.48)式中的两个条件(第二个条件限制了 n')一起成为(2.46′)式成立的必要条件。该式代表两个在相反方向传播而无相互作用的波的组合。因此在几何光学近似下不存在波的反射，指数式中的表式给出波从 z_0 传播到 z 时的相移，而指数式前的因子保证了能量守恒定律。

在波斜入射(入射角 θ_0)情形下，(2.46′)式中的 k_0n 应为 $k_0(n^2-\sin^2\theta_0)^{1/2}$ 所取代，而对于任意的 z 都有 $(n^2-\sin^2\theta_0)^{1/2}=n(z)\cos\theta(z)$，因此几何光学近似下的通解可写为

$$\begin{aligned}\psi(x,z) = (n\cos\theta)^{-1/2}\Big[C_1\exp\Big(\mathrm{i}k_0\int_{z_0}^{z} n\cos\theta\mathrm{d}z\Big) \\ + C_2\exp\Big(-\mathrm{i}k_0\int_{z_0}^{z} n\cos\theta\mathrm{d}z\Big)\Big]\exp(\mathrm{i}k_0\sin\theta_0 x)\end{aligned} \tag{2.50}$$

其中，C_1 和 C_2 为任意常数，z_0 的选择只会影响这两个常数的值，而不会影响解本身。在这个解正确性的判据(2.48)式和(2.49)式中也须用 $(n^2-\sin^2\theta_0)^{1/2}=n\cos\theta$ 来替代 n；特别是不难看出，这两个判据在由 $n(z)=\sin\theta_0,\theta=0$ 所确定的“返转点”邻域内不被满足。

2.4.2 Airy 函数

在讨论返转点邻域内的场之前，先简略地讨论一下 Airy 函数，它不但在我们此刻的问题中，而且在其他传播问题(如焦散面附近的场，特别是在第 4 章中将讨

论的衍射问题)中也具有特殊的重要性。

考虑如下形式的典型方程

$$F'' - \eta F = 0 \tag{2.51}$$

撇开常数乘子,方程(2.51)具有 $\eta\to\infty$时趋于 0 这一性质的唯一解就是 Airy 函数,其定义为:对于实数 η①

$$Ai(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + \eta s\right)\mathrm{d}s \tag{2.52}$$

对于复数 η

$$Ai(\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_{Ai}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(s^3/3+\eta s)}\mathrm{d}s \tag{2.52'}$$

回路 C_{Ai}起始于 s 相位为 $5\pi/6$ 的线上的$|s|=\infty$点,终止于 s 相位为 $\pi/6$ 的线上的$|s|=\infty$点;将 C_{Ai}变形至实轴即可证明:对于实数的 η,(2.52′)式等效于(2.52)式,Ai 可用 1/3 阶圆柱函数表出并有专门的函数表[55]。

$|\eta|$很大时 $Ai(\eta)$的渐近表达式可由(2.52′)式推出。当 η 的相位 ϕ 在$-2\pi/3$和 $2\pi/3$ 之间时,将回路 C_{Ai}变形为一最陡下降路径$s=s(l)$,该路径通过$s=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\eta^{1/2}$处的鞍点(在该处 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}l=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/4}$)。由于被积函数在鞍点处有一很尖的峰值,$s^3/3+\eta s$ 就可用 $\mathrm{i}\left(\frac{2}{3}\right)\eta^{3/2}+\mathrm{i}|\eta|^{1/2}l^2$ 来近似,这里 l 为沿路径到鞍点的距离,因此求得

$$Ai(\eta) \to \frac{\mathrm{e}^{-(2/3)\eta^{3/2}}}{2\pi^{1/2}\eta^{1/4}},\ -2\pi/3 < \phi < 2\pi/3 \tag{2.53a}$$

当 $2\pi/3<\phi<4\pi/3$ 时,C_{Ai}伸展开来以致其中点扩延至负虚轴上的$-\mathrm{i}\infty$点,其左段变形为一通过 $s=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\eta^{1/2}$处鞍点(在该处 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}l=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/4}$)的最速下降路径;而其右段变形为一通过 $s=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\eta^{1/2}$处鞍点(在该处 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}l=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/4}$)的最速下降路径。于是,在作类似于上述的近似之后,可求得

$$Ai(\eta) \to \frac{1}{2\pi^{1/2}\eta^{1/4}}\left(\mathrm{e}^{-(2/3)\eta^{3/2}} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{(2/3)\eta^{3/2}}\right),2\pi/3 < \phi < 4\pi/3 \tag{2.53b}$$

在将(2.53a)式与(2.53b)式对照时会使人觉得沿直线 $\phi=2\pi/3$ 和 $\phi=4\pi/3$ 有不连续性,其实并不存在,因为在$|\eta|$很大时 $\mathrm{e}^{(2/3)\eta^{3/2}}$沿前一条直线的值小到可以忽略;并且因为构成(2.53b)式的两项中的第二项在 $\phi=4\pi/3$ 时的计值与第一项在$\phi=2\pi/3$时的计值完全一样。

当 η 为负实数时,在(2.53b)式中令 $\eta=|\eta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$即得

$\eta<0$:

$$Ai(\eta) \to \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{2\pi^{1/2}|\eta|^{1/4}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2/3)|\eta|^{3/2}} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2/3)|\eta|^{3/2}}\right)$$

---

① 不同文献中出现多种不同定义,此处定义采自文献[54]。

$$= \frac{1}{\pi^{1/2}|\eta|^{1/4}}\cos\left(\frac{2}{3}|\eta|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.54}$$

因此，$Ai(\eta)$在作为一实数 η 的函数时，对于 $\eta<0$ 为振荡的(图 7)，$Ai(0)=0.355$，…；对于 η 一系列负值，$Ai(\eta)$首先在 $\eta=-1.019$ 时取其最大的峰值 0.536，在 $\eta=-2.338$ 时到达其第一个零点，在 $\eta=-3.248$ 时到达极小值 -0.419，在 $\eta=-4.088$时到达第二个零点，在 $\eta=-4.820$ 时到达第二个极大值 0.380。第 n 个零点渐近地出现于 $\eta=-\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\left[\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi\right]^{2/3}$。

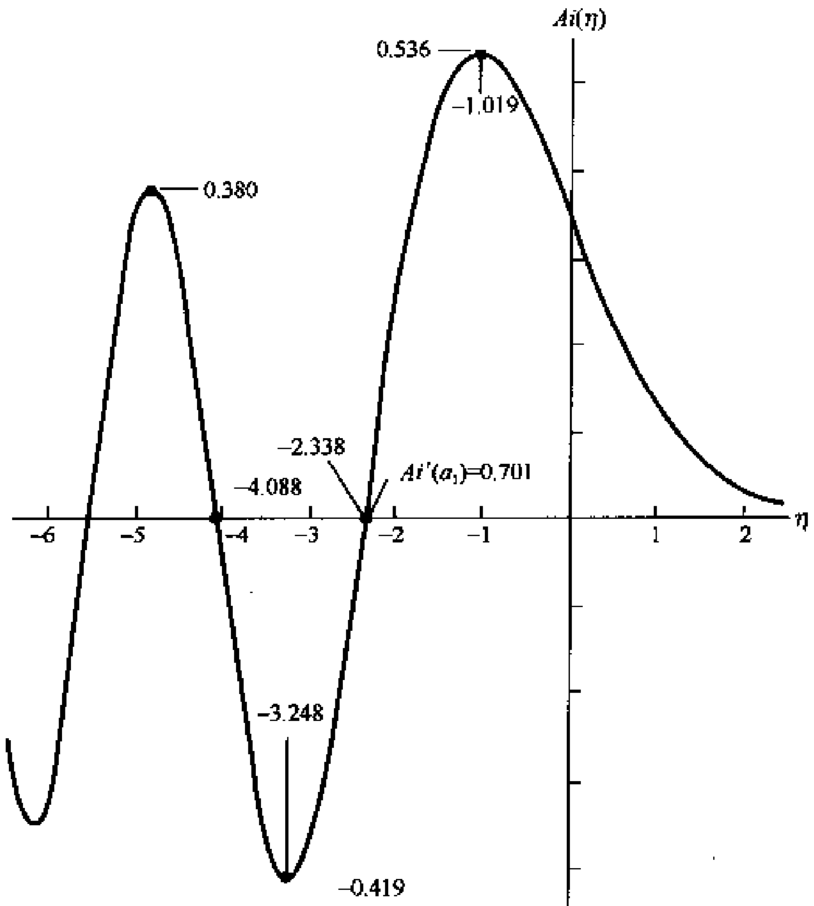


图 7 宗量为实数的 Airy 函数 $Ai(t)$的图示

2.4.3 存在返转点时的场

为了讨论返转点[在这一点上 $\cos\theta=0$ 因而解(2.50)式失去意义]邻域内的声场，我们首先对(2.38b)式作某些形式变换。引进新变量 t 代替 z，即 $z=z(t)$，这时可将(2.38b)式(如是斜入射情形，只需将 n^2 理解为 $n^2-\sin\theta_0$)写为[56]

$$\psi'' - (z''/z')\psi' + k_0^2 n^2 z'^2 \psi = 0$$

其中撇号表示对 t 的微商，为了消去上面方程中含 ψ' 的项，将 ψ 换为 Ψ：

$$\psi = (z')^{1/2}\Psi \tag{2.55}$$

代入上式后取得

$$\Psi'' + k_0^2(z')^2 n^2 \Psi = [3(z'')^2/4(z')^2 - z'''/2z']\Psi \tag{2.56}$$

现在指定函数 $z(t)$ 的具体形式，设

$$t = \mathrm{i}k_0\int_{z_0}^{z} n\mathrm{d}z \tag{2.57}$$

这时(2.56)式成为

$$\Psi'' - \Psi = [3\dot{n}^2/2n - \ddot{n}]/2k_0^2 n^3 \tag{2.56'}$$

其中 n 上方的小圆点代表对宗量 z 的微商。当 k_0 很大时右端可忽略，这时的方程

$$\Psi'' - \Psi = 0 \tag{2.58}$$

称为关于(2.56′)式的**标准方程**[57]，它的解就是(2.54)式的解在 $k_0 \to \infty$ 时的一致渐近式。方程(2.58)的两个线性独立解为 $\Psi = \mathrm{e}^{\pm t}$，若从 Ψ 和 t 变换回 ψ 和 z，即可立即看出它们就是几何光学近似解(2.46′)式。

设返转点对应于 $z=0$，这时(2.58)式就不是关于(2.56′)式的标准方程，因当 $z \to 0$ 时(2.56′)式的右端非但不是很小，反倒是无限制增大。设在 $z=0$ 附近(2.38b)式中的 $n^2(z)$ 可表为级数

$$n^2 = -az + bz^2 + \cdots,\quad a > 0 \tag{2.59}$$

这时 $z=0$ 称为一阶返转点；当 $z=0$ 而 $b \neq 0$ 时就是二阶返转点；余类推。

如在(2.59)式中只取第一项(即考虑 z 很小，亦即在返转点 $z=0$ 邻域内)，这种情形下的解可用 Airy 函数表示出[56]，因而 Airy 函数的方程就是这种情形下的标准方程。为了将(2.56)式变换为这一标准方程，引进变量

$$t = \left(\frac{3\mathrm{i}k_0}{2}\int_0^z n\mathrm{d}z\right)^{2/3} = (\pm 1)^{2/3} z/H,\ H = (ak_0^2)^{-1/2} \tag{2.60}$$

这时将(2.56)式右端用 0 代替，即得到(2.51)式型的 Airy 方程

$$\Psi'' - t\Psi = 0 \tag{2.61}$$

现在就可对任一 z 构成方程(2.38b)的解。为此在 $t=0$(即 $z=0$)附近划定一个区域 $|t| \leqslant t_1$，$t_1 \gg 1$，使在展开式(2.59)中可以只取第一项。以相当的步骤即可求出不同范围内的声场表式

$$\begin{aligned}
t < -t_1 &: \psi = C_1 n^{-1/2}\exp\left(\mathrm{i}k_0\int_0^z n\mathrm{d}z\right) + C_2 n^{-1/2}\exp\left(-\mathrm{i}k_0\int_0^z n\mathrm{d}z\right)\\
|t| \leqslant t_1 &: \psi = 2C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}(-t/n^2)^{1/4}Ai(t)\\
t > t_1 &: \psi = C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}(-n^2)^{-1/4}\exp\left(-k_0\int_0^z(-n^2)^{1/2}\mathrm{d}z\right)
\end{aligned} \tag{2.62}$$

由此可见，在离返转点足够远处，声场在几何光学近似下分别是直达(入射)波和返回(反射)波；在返转点附近场由 Airy 函数描述；在离开返转点后场随着 z 的增加

而指数性衰减。

关于存在两个返转点的情形，可参阅文献[58]。

2.5 简正波解[35]

方程(2.38a)的另一基本解法是表出为各阶简正波之和的形式。这些简正波中的每一个都独立地满足波动方程和边界条件，并以各自的速度沿着界面传播。

2.5.1 虚源图像

为了阐明简正波解法，我们考虑一种理想化的简单模型：均匀的大气层位于 $z=0$ 和 $z=h$ 之间，一点声源位于 $z=z_0$ 处，上、下两界面均为完全反射的，即分别为自由界面和刚性界面。这时声势 ψ 在层中就满足波动方程(2.38)，只是 $K\to k$ 为常数；而在下、上二界面上分别满足条件

$$\begin{aligned}&\text{法向速度被禁制：} \quad \partial_z\psi=0,z=0\\&\text{声压为0：} \quad \psi=0,z=h\end{aligned} \tag{2.62}$$

声源在两个界面上反复反射，形成一个无限的虚源链(图8)，而任一点 $P(r,z)$ 处的声场就可看成是直达波和这一系列虚源所辐射的波之和。

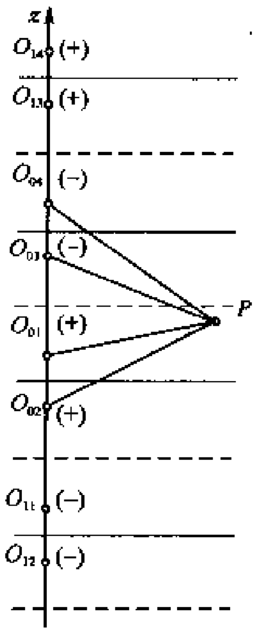


图8 对上界面为自由界面($\mathscr{R}=-1$)而下界面为刚性界面($\mathscr{R}=1$)的大气层所作出的虚源链

例如，用由下界面的镜反射所得到虚源 O_{02} 的场来补充原来声源 O_{01} 的场，合成场就是

$$\psi=\frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}}+\frac{e^{ikR_{02}}}{R_{02}} \tag{2.63}$$

其中，$R_{01}=[r^2+(z-z_0)^2]^{1/2}$ 和 $R_{02}=[r^2+(z+z_0)^2]^{1/2}$ 分别为 O_{01} 和 O_{02} 到场点 (r,z) 的距离。容易看出，(2.63)式既满足波动方程(2.38)又满足下界面 $z=0$ 上的边界条件。由于 O_{01} 和 O_{02} 相对于 $z=0$ 是对称的，从对称条件直接得出在这界面上满足 $\partial_z\psi=0$。但是它不满足 $z=h$ 上的边界条件。

现在对 O_{01} 和 O_{02} 补充以它们在上界面上镜反射得到的一对虚源 O_{03} 和 O_{04}，这时所得到的解既满足波动方程又满足上界面上的边界条件，但却不满足下界面上的边界条件。如果再补充以 O_{03} 和 O_{04} 由下界面镜反射所形成的虚源 O_{11} 和 O_{12} 的场，则又是下界面上的边界条件被满足而在上界面上不被满足，余类推。继续延长这种虚源的链结构，就交替地得到边界条件在一个界面上被满足而在另一界面上不被满足的情形。可是由于每次所补充的一对虚源距场点愈来愈远，它们的贡献愈来愈小，因而在无限长虚源链的极限情况下，两个界面上的边界条件就同时被

满足。

可是由于两个界面上的边界条件不同；$\partial_z\psi=0$ 对应于反射系数$\mathcal{R}=1$ 而$\psi=0$ 对应于反射系数$\mathcal{R}=-1$，因此从上界面反射的各个虚源是在与基本声源(以及它由下界面镜反射形成的各个虚源)相反的相位下工作着。这些虚源所对应的射线从上界面($\mathcal{R}=-1$)上反射奇数次，这时的虚源链如图 8 所示，基本声源和与其同相的虚源标以(+)号，而与其反相的虚源标以(−)号。不难看出，连接后一类虚源与观察点 P 的直线同上界面和它的各次镜像(由一组水平虚线表示)相交奇数次。

于是，最后 P 处的总场可写为

$$\psi=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\left[\frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}}+\frac{e^{ikR_{l2}}}{R_{l2}}+\frac{e^{ikR_{l3}}}{R_{l3}}-\frac{e^{ikR_{l4}}}{R_{l4}}\right] \tag{2.64}$$

2.5.2　场的积分表示

众所周知，在处理点源发出的球面波在平界面上的反射问题时，首先需将球面波分解为平面波，为此可写出[35]：

$$\frac{e^{ikR}}{R}=\frac{ik}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty}\int_0^{2\pi}e^{i(k_x x+k_y y\pm k_z z)}\sin\theta d\theta d\varphi \tag{2.65}$$

其中，R 为从声源到观察点的距离，θ 和 φ 分别为波矢 $\boldsymbol{k}$ 对 z 轴和 $\boldsymbol{k}$ 在(x,y)平面上的投影对 x 轴所成夹角；而±号分别对应于 $z>0$ 和 $z<0$ 的情形。

考虑到对 φ 的积分归结为零阶 Bessel 函数 J_0(亦可表示为第一类和第二类 Hankel 函数 $H_0^{(1)}$ 与 $H_0^{(2)}$ 之和)；对 θ 的积分于是成为被积式完全一样的两个积分[计及 $H_0^{(2)}(e^{-\pi i}u)=-H_0^{(1)}(u)$]，但一个是从 0 积到 $\pi/2-i\infty$，另一个是从 $-\pi/2+i\infty$积到 0，将这两个积分合并成一个沿着路径 Γ 从 $-\pi/2+i\infty$积到$\pi/2-i\infty$的积分，即可将(2.65)式变换为

$$\frac{e^{ikR}}{R}=\frac{ik}{2}\int_\Gamma e^{\pm ikz\cos\theta}H_0^{(1)}(kr\sin\theta)\sin\theta d\theta \tag{2.66}$$

对求和式(2.64)中每一项应用上式，并让 z 这个量遍历 $z=z_{lj}$ 的所有值：$l=0,1,2,\cdots;j=1,2,3,4$；其中，根据(2.63)式中 R_{01} 和 R_{02} 的类似关系，可得

$$\begin{aligned}
z_{l1}&=2lh+z-z_0\\
z_{l2}&=2lh+z+z_0\\
z_{l3}&=2(l+1)h-z-z_0\\
z_{l4}&=2(l+1)h-z+z_0\\
R_{lj}&=\sqrt{r^2+z_{lj}^2}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

除 $z_{01}=z-z_0$ 外，对于所有的 l 和 j 都有 $z_{lj}>0$。

将按(2.66)式加以变换的 $e^{ikR_{lj}}/R_{lj}$ 的表达式代入(2.64)式中，交换求和与积

分的次序，引进记号 $b=\mathrm{i}k\cos\theta$ 并作一些简单变换，例如，考虑恒等式：

$$\mathrm{e}^{b(z-z_0)}+\mathrm{e}^{b(z+z_0)}-\mathrm{e}^{b(2h-z-z_0)}-\mathrm{e}^{b(2h-z+z_0)}\equiv(\mathrm{e}^{-bz_0}+\mathrm{e}^{bz_0})(\mathrm{e}^{bz}-\mathrm{e}^{b(2h-z)})$$

并且对于无穷几何级数有

$$\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\mathrm{e}^{2lbh}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2bh}}$$

对于 $z>z_0$ 和 $z<z_0$ 便分别得到

$$z>z_0,\psi=2\mathrm{i}k\int_{\Gamma}\frac{\cosh bz_0\sinh b(h-z)}{\cosh bh}H_0^{(1)}(kr\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$z<z_0,\psi=2\mathrm{i}k\int_{\Gamma}\frac{\cosh bz\sinh b(h-z_0)}{\cosh bh}H_0^{(1)}(kr\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \qquad (2.68)$$

可以看出，两个表式的差别仅在于将 z 与 z_0 作一交换，这是符合互易性原理的。也可以证明，除了在源点 $(0,z_0)$ 给出必需的、形式为 $1/R$ 的奇点以外，积分(2.68)到处是收敛的。

2.5.3 简正波

可以将积分表式(2.68)变换为简正波之和，为此引进新积分变量 $\xi=k\sin\theta$ 来代替 θ，这时积分限变为从 $-\infty$ 到 $+\infty$，而(2.68)式成为

$$z>z_0,\psi=2\mathrm{i}k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cosh bz_0\sinh b(h-z)}{b\cosh bh}H_0^{(1)}(\xi r)\xi\mathrm{d}\xi$$

$$z<z_0,\psi=2\mathrm{i}k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cosh bz\sinh b(h-z_0)}{b\cosh bh}H_0^{(1)}(\xi r)\xi\mathrm{d}\xi \qquad (2.69)$$

用这种方法得到的积分可化为被积式极点处的留数之和。极点位置由

$$\cosh bh=0 \qquad (2.70)$$

的根所确定，它们是

$$b_l h=\mathrm{i}\pi\left(l+\frac{1}{2}\right),l=0,\pm1,\pm2,\cdots \qquad (2.71)$$

或者，由于 $b=\sqrt{\xi^2-k^2}$，极点位置就是

$$\xi_l=\pm\sqrt{k^2-\left(\frac{\pi}{h}\right)^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2} \qquad (2.71a)$$

当 $\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi<kh$ 时，这些极点位于 ξ 平面内的实轴上；当 l 很大时就在虚轴上（l 的符号不起任何作用，因此只考虑正的 l 值）。如果考虑到大气中存在的吸收，可认为 k 具有哪怕是很小的正虚部（这一虚部在最后结果中可以趋于零）。在这种情况下，极点就不是正好分布在坐标轴上，而是各离开坐标轴一小段距离地分布在第一、三象限中。

现在在上半平面内把积分路径从实轴迁延到无限远，只要 $r\neq 0$，函数 $H_0^{(1)}(\xi r)$就在无限远处趋于零。可以证明，沿着积分回路的无限远部分的积分消失，结果 ψ 的整个表式化为在分布于第一象限中的极点上所取留数(用记号 Res 表示)之和：

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\xi\cosh bz_0\sinh b(h-z)}{b\cosh bh}\right]_{\xi=\xi_l}=\left[\frac{\xi\cosh bz_0\sinh b(h-z)}{b\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\cosh bh)}\right]_{\xi=\xi_l}$$

因为$[\cosh bh]_{\xi=\xi_l}=0$，所以$[\sinh b(h-z)]_{\xi=\xi_l}=\sinh bh\cosh bz$；又由于$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\cosh bh)=\dfrac{\xi h}{b}\sinh bh$，结果留数就是

$$\mathrm{Res}[\ ]=\frac{1}{h}\cosh b_l z\cosh b_l z_0$$

于是声场表式(2.68)可变为

$$\psi=\frac{2\pi \mathrm{i}}{h}\sum_{l=0}^{\infty}\cosh b_l z_0\cosh b_l z H_0^{(1)}(\xi_l r)\tag{2.72}$$

其中 b_l 和 ξ_l 分别由(2.71)式和(2.71a)式给出。

解式(2.72)满足问题的所有条件：用代入法可以直接验证，它逐项满足波动方程(2.38)和边界条件(2.62)式，(2.72)式中的每一项就是所谓简正波。

在离开声源的距离比波长大得多的地方，Hankel 函数可以用其渐近表式来替换：

$$r\to\infty:\psi=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{h}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\cosh b_l z_0\cosh b_l z\frac{1}{\sqrt{\xi_l}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_l r}\right\}\tag{2.73}$$

不难看出：每一简正波的速度为

$$V_l=\frac{\omega}{\xi_l}=\frac{c}{\sqrt{1-\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2h}\right]^2}}\tag{2.74}$$

其中，c 为声速，λ 为波长。由上式可见：当$\left(l+\frac{1}{2}\right)\lambda\leqslant 2h$ 时，$V_l\geqslant c$；如$\left(l+\frac{1}{2}\right)\lambda>2h$，则 V_l 变为虚数，其物理意义就是：相应的简正波是振幅按指数律随 r 的增加而减少的不均匀波，这些波的存在对于获取声源处所要求的奇点是必需的。

当 $r\gg h$ 时，(2.73)式的求和式中实际上只需考虑满足条件$\left(l+\frac{1}{2}\right)\lambda<2h$ 的有限几项，这些项的数目等于在厚度 h 中所有的半波数目。

(2.73)式中每一项表示在 r 方向行进而在 z 方向驻立的波，每个波的振幅对 z 的依赖关系由因子 $\cosh b_l z$ 给出，在图 9 中对 $l=0,1,2,3$ 的情形(开头四阶简正波)示出这种依赖关系。

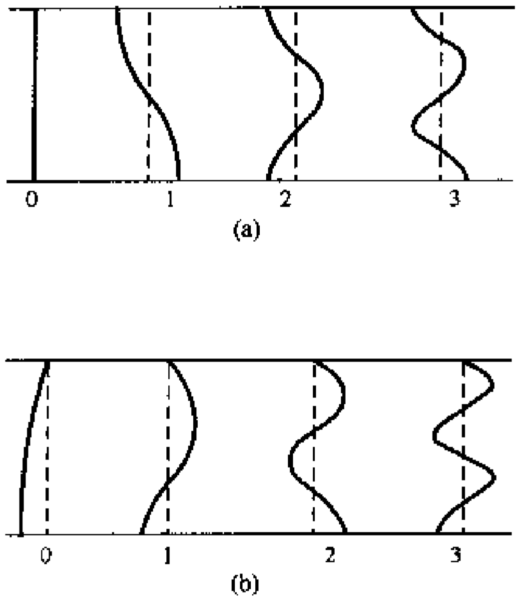


图 9 在上、下界面分别为自由界面和刚性界面的大气中，开头四阶简正波振幅沿层的厚度的变化

(a)上界面反射系数＝1；(b)上界面反射系数＝－1

2.5.4 界面为任意的情形

最后可以简短地提一下：对完全反射界面所得到的总场公式(2.64)对于任意界面的情形也是正确的。这时下、上界面的反射系数$\mathscr{R}_1$和$\mathscr{R}_2$都是入射角的函数，并且2.5.1节中所由出发的虚源图像可能不再正确①，但是仍然可以导出与(2.64)式相对应的公式[59]：

$$\psi=\sum_{l=0}^{\infty}(\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2)^l\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_{l1}}}{R_{l1}}+\mathscr{R}_1\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_{l2}}}{R_{l2}}+\mathscr{R}_2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_{l3}}}{R_{l3}}+\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_{l4}}}{R_{l4}}\right] \tag{2.75}$$

相应地，代替(2.68)式，可以求出(我们只写出$z>z_0$时的表式，对于$z<z_0$，可在其中交换z和z_0的位置而得到)

$$\psi=\frac{\mathrm{i}k}{2}\int_{\Gamma}\frac{(\mathrm{e}^{-bz_0}+\mathscr{R}_1\mathrm{e}^{bz_0})(\mathrm{e}^{-b(h-z)}+\mathscr{R}_2\mathrm{e}^{b(h-z)})}{\mathrm{e}^{-bh}(1-\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2\mathrm{e}^{2bh})}H_0^{(1)}(kr\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{2.76}$$

对积分路径Γ作出变换，再分别计算被积式极点处(令为θ_l)留数之和，可以得到普遍情形下简正波的公式：

$$\psi=\pi k\sum_l\left[\frac{(\mathrm{e}^{-bz}+\mathscr{R}_1\mathrm{e}^{bz})(\mathrm{e}^{-bz}+\mathscr{R}_2\mathrm{e}^{bz})}{\mathscr{R}_l(\partial/\partial\theta)(\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2\mathrm{e}^{2bh})}\right]_{\theta_l}H_0^{(1)}(kr\sin\theta_l)\sin\theta_l \tag{2.77}$$

由于上式在z和z_0互换时保持不变，所以它对所有$0\leqslant z\leqslant h$都是正确的。

① 一般说来，这时虚场的总和不是问题的正确解，而在一定情形下，它是实际情况的某种近似。

2.6　几何(射线)声学基本概念[60]

大气这种介质的特殊性,使得几何声学在大气声学的研究中具有特殊的重要性,因此有必要较详细地来讨论。

2.6.1　波前、射线、程函

波前的概念在射线声学中起中枢作用,波前实际上就是波形特征在某一瞬间所形成的曲面,随着时间的推移而向前移动。例如,如果声压的时间历程中有一明显的单峰在时刻 $\tau(\boldsymbol{x})$ 到达 $\boldsymbol{x}$ 点,则满足 $t=\tau(\boldsymbol{x})$ 的所有点的集合就描绘出时刻 t 的相应波前。对于一恒定频率的扰动,波前就是振荡着的声压的相位处处都取同一值的那一系列曲面;然而,关于几何声学的理论都不言而喻地作了下述假定:振幅在可与波长相比拟的距离上变化很小,并且波前的曲率半径比波长大得多。

波前相对于固定坐标系以声速 c 移动,如周围介质以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动,则在移动坐标系中观察到的波速 $c\boldsymbol{n}$($\boldsymbol{n}$ 为波前法线单位矢)在静止坐标系中即成为 $\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{n}$。在随着周围介质一起以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的坐标系中,$\boldsymbol{n}$ 与传播方向一致;但对静止观察者来说就不一定了,因为这时 $\boldsymbol{n}$ 与参考系的速度无关但传播方向却与之有关。

令 $\boldsymbol{x}_P(t)$ 为初始时刻在波前 $t=\tau(\boldsymbol{x})$ 上的一移动点(图 10),按上所述,$\boldsymbol{x}_P(t)$ 就总是在运动着的波前上,只要其速度为:

$$\mathrm{d}_t\boldsymbol{x}_P = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_P,t) + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_P,t)c(\boldsymbol{x}_P,t) \equiv \boldsymbol{v}_{\text{ray}} \tag{2.78}$$

这里我们容许 $\boldsymbol{v}$ 和 c 都有随位置和时间变化的可能性,$\boldsymbol{x}_P(t)$ 随 t 的变化在空间中描出的线即为射线;函数 $\boldsymbol{x}_P(t)$ 为射线轨迹。在其法向方向的波前速率为(2.78)式右端与 $\boldsymbol{n}$ 之点积;此乘积等于 $c+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$,小于射线速度 $\boldsymbol{v}_{\text{ray}}$ 的量值 $|c\boldsymbol{n}+\boldsymbol{v}|$。

(2.78)式表现为 Huygens 原理的一种推广,据此可确定各后继时刻的波前。但对于不均匀介质,直接应用是很棘手的,因为它要求沿射线路径每一瞬间的 $\boldsymbol{n}$ 均为已知(这就要求知道很短时间间隔内射线附近的波前结构)。为了避免这一点,我们导出一可以预告 $\boldsymbol{n}$ 的时间变化率的附加微分方程,代替直接同 $\boldsymbol{n}$ 打交道,我们采用波延缓矢① $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})=\nabla\tau(\boldsymbol{x})$,由于 $\nabla\tau$ 垂直于曲面 $t=\tau(\boldsymbol{x})$,该矢量平行于 $\boldsymbol{n}$。

采用"波延缓"这一称号是因为 $|\boldsymbol{s}|$ 的倒数就是速率 $c+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}$,而波前以此速率在其本身法线方向移动。关于这一点的证明,可从考虑相近时刻 t 和 $t+\Delta t$ 的波前出发。对于一给定射线轨迹 $\boldsymbol{x}_P(t)$,$t+\Delta t$ 时的位置近似地为 $\boldsymbol{x}_P(t)+\dot{\boldsymbol{x}}_P(t)\Delta t$(上加点表示对其宗量的全微商),所以 $t+\Delta t\approx\tau(\boldsymbol{x}_P+\dot{\boldsymbol{x}}_P\Delta t)\approx\tau(\boldsymbol{x}_P)+\Delta t\dot{\boldsymbol{x}}_P\cdot\nabla\tau$。

① 这一术语来源于文献[61]。对于恒定频率的平面波,$\boldsymbol{s}$ 就是 $\boldsymbol{k}/\omega$,所以它的方向平行于相速度而量值等于相速度的倒数。

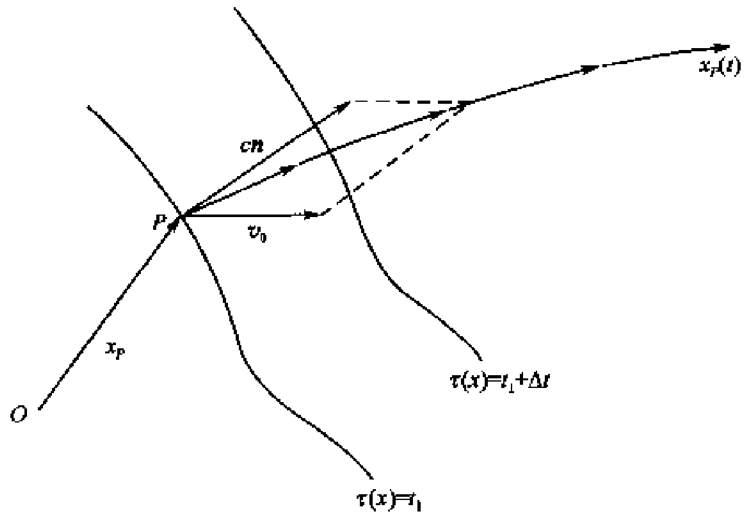


图 10 波前和射线的概念:点 $x_P(t)$以速度 $cn+v$ 运动着,以致它总是位于波前 $c(x)$上,连续如此的结果就“寻迹”出一条射线

可是 $t=\tau(x_p)$而$\nabla\tau=s$,所以这就要求$\nabla\tau\cdot x_p=1$;或者,从(2.78)式,对于任一给定时刻波前上的任一给定点

$$s\cdot(cn+v)=1, cs\cdot n=1-v\cdot s \tag{2.79}$$

由于 s 平行于 n,故 $s=(s\cdot n)n$ 而 $n=s/(s\cdot n)$,因而上式给出

$$s=\frac{n}{c+v\cdot n}, n=\frac{cs}{\Omega} \tag{2.80}$$

其中

$$\Omega=1-v\cdot s=1-v\cdot\nabla\tau=\frac{c}{c+v\cdot n} \tag{2.81}$$

(2.80)式证实了断言:$|s|^{-1}=c+n\cdot v$。同样,由于 $n\cdot n=1$ 而 $s=\nabla\tau$,上述关系给出

$$s^2=\frac{\Omega^2}{c^2}, (\nabla\tau)^2=\frac{\Omega^2}{c^2} \tag{2.82}$$

上列方程就是程函方程,而 $\tau(x)$就是程函。

2.6.2 射线寻迹方程

关于 s 沿射线轨迹时间变化率的微分方程可从下式出发推出①:

$$d_t s(x_P)=(\dot{x}_P\cdot\nabla)s=c(n\cdot\nabla)s+(v\cdot\nabla)s \tag{2.83}$$

① 关于该方程有许多不同的推导,其中最早的当推文献[62],关于运动分层流体中射线路径的分析的早期工作则有文献[63]~[65]。

其中所有的量均应理解为在 $x_P(t)$ 处取值。因 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 同方向，故第一项含有因子 $(\boldsymbol{s}\cdot\nabla)\boldsymbol{s}$，它可表示为

$$(\boldsymbol{s}\cdot\nabla)\boldsymbol{s}=-\boldsymbol{s}\times(\nabla\times\boldsymbol{s})+\frac{1}{2}\nabla s^2=0+\frac{1}{2}\nabla\frac{\Omega^2}{c^2}$$

$$=-\frac{\Omega}{c^2}\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})-\frac{\Omega^2}{c^3}\nabla c \tag{2.84}$$

其中利用了 $\nabla\times(\nabla\tau)=0$ 和(2.82 式)中关于 s^2 的式子。先后以(2.84)式和(2.80)中的第二式代入(2.83)式即给出

$$\mathrm{d}_t\boldsymbol{s}=-\frac{\Omega}{c}\nabla c-\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{s} \tag{2.85}$$

利用以下矢量关系式[(2.84)式为此关系的一个特殊情形]可将上式进一步简化：

$$\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})=\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{s})+\boldsymbol{s}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{s}+(\boldsymbol{s}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \tag{2.86}$$

这里的第一项为 0，因 $\boldsymbol{s}(=\nabla\tau)$ 为一梯度。

(2.78)式和(2.85)式即所谓射线寻迹方程，以(2.80)式中第二式和(2.86)式代入后可写为(自此以后略去下标 P)

$$\mathrm{d}_t\boldsymbol{x}=\frac{c^2\boldsymbol{s}}{\Omega}+\boldsymbol{v} \tag{2.87}$$

$$\mathrm{d}_t\boldsymbol{s}=-\frac{\Omega}{c}\nabla c-\boldsymbol{s}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{s}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \tag{2.88}$$

或者，在直坐标符号下

$$\mathrm{d}_t s=-\frac{\Omega}{c}\partial_i c-\sum_{j=1}^{3}s_j\partial_i v_j \tag{2.88$'$}$$

这些方程不依赖于 $\boldsymbol{s}$ 的空间微商；故如 $c(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ 被指定，并且射线位置 $\boldsymbol{x}$ 和波延缓矢 $\boldsymbol{s}$ 也在时刻 t_0 被指定，则可将方程组(2.87)～(2.88)对时间积分以确定任一后继时刻的 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{s}$；并不需要关于相邻射线的任何信息，尽管这些方程是非线性的，但均为一阶常微分方程，所以它们可以用标准的数值积分技术来求解，可参阅文献[66]、[67]。在第 7 章中将具体讨论之。

对于更普遍的情形，可考虑频率 $\omega(\boldsymbol{x},t)$ 和波数 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x},t)$ 均为缓变的波包在一依赖于时间的不均匀各向异性介质中的传播。如 $F(\omega,\boldsymbol{k},\boldsymbol{x},t)=0$ 描述时刻 t 在点 $\boldsymbol{x}$ 附近的频散关系，则射线方程由以下方程组给出[68,69]

$$\mathrm{d}_t\omega=-\frac{\partial_t F}{\partial_\omega F},\mathrm{d}_t x_i=-\frac{\partial_{k_i}F}{\partial_\omega F},\mathrm{d}_t k_i=\frac{\partial_{x_i}F}{\partial_\omega F} \tag{2.89}$$

在上述特殊情况下，频散关系可由程函方程(2.82)推出：$F=(\omega-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})^2-c^2k^2=0$。

2.6.3 Fermat 原理

如果 l 表示沿射线路径的距离，那么 $\mathrm{d}_l\boldsymbol{x}$ (简示为 $\boldsymbol{x}'$)就表示射线方向。由

(2.78)式所定义的射线速率 v_{ray} 因此满足

$$c\boldsymbol{n} = v_{ray}\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{v} \tag{2.90}$$

由于 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}'=1$，故 v_{ray} 满足二次方程

$$v_{ray}^2 - 2v_{ray}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}' - (c^2 - v^2) = 0$$

其正解(给定 $c^2>v^2$)为

$$v_{ray} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}' + [c^2 - v^2 + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}')^2]^{1/2} \tag{2.91}$$

因而一射线从 $\boldsymbol{x}_A$ 到 $\boldsymbol{x}_B$ 所需时间为

$$t_{AB} = \int_{l_A}^{l_B} \frac{dl}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}' + [c^2 - v^2 + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}')^2]^{1/2}} \tag{2.92}$$

这里我们假定了 c 和 $\boldsymbol{v}$ 都只是坐标的函数，这样，对于一给定的射线路径，它们就都可看成是沿路径距离 l 的函数。

Fermat 原理①表明：联结 $\boldsymbol{x}_A$ 和 $\boldsymbol{x}_B$ 的实际射线路径是使得行进时间积分 t_{AB} 相对于路径的微小虚变化是稳定的。如将一微小变化 $\boldsymbol{x}(l)\to\boldsymbol{x}(l)+\delta\boldsymbol{x}(l)$ 加到实际路径上(图 11)，精确到 $\delta\boldsymbol{x}$ 的一阶量，行进时间所产生的变化 δt_{AB} 应为 0。

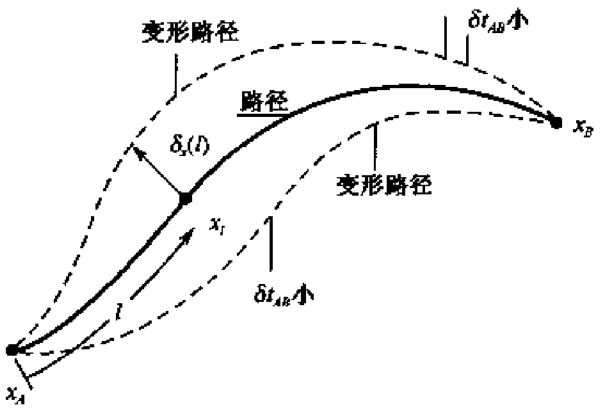


图 11 Fermat 原理

路径中途没有反射时的证明可着手如下：将积分变量改变为射线路径在联结 $\boldsymbol{x}_A$ 和 $\boldsymbol{x}_B$ 的直线上的投影 q，这样 dl 就成为 $(\boldsymbol{x}_q\cdot\boldsymbol{x}_q)^{1/2}dq$ 而 $\boldsymbol{x}'$ 成为 $\boldsymbol{x}_q/(\boldsymbol{x}_q\cdot\boldsymbol{x}_q)^{1/2}$，其中 $\boldsymbol{x}_q$ 为 $\boldsymbol{x}$ 对 q 的微商。于是行进时间 t_{AB} 就变成 $L(\boldsymbol{x}_q,\boldsymbol{x})$ 对 q 从 0 到 $|\boldsymbol{x}_B-\boldsymbol{x}_A|$ 的积分，这里

$$L(\boldsymbol{x}_q,\boldsymbol{x}) = \frac{x_q^2}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}_q + [(c^2 - v^2)x_q^2 + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}_q)^2]^{1/2}} \tag{2.93}$$

---

① Fermat 原本“猜想”光的行进时间为一极小值(1657，“最短时间原理”)后来 Hamilton 认识到这种提法有其例外情况而正确的表述(1833)应为：“实际路径参照其他相邻路径而言为稳定的。”关于这一原理也适用于运动介质中声波的证明应归于 Ugincius(1972)[70]。

行进时间为稳定的这一要求就导致 Euler-Lagrange 方程[①]

$$d_q \partial_{x_q} L - \partial_x L = 0 \tag{2.94}$$

应用本节前二段中所导出的关系和定义，在若干代数运算之后即可将函数 $L(\boldsymbol{x}_q, \boldsymbol{x})$的偏微商化为

$$\begin{aligned} \partial_{x_q} L &= \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_{\text{ray}}} = \boldsymbol{s} \\ \partial_x L &= -\frac{d_q l}{v_{\text{ray}}} \left[\frac{\Omega}{c} \nabla c + \boldsymbol{s} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{s} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} \right] \end{aligned} \tag{2.95}$$

于是(2.94)式就相当于射线寻迹方程(2.88)，从而 Fermat 原理就是射线方程的推论。

推广来说，Fermat 原理不仅对光滑的连续射线路径适用，而且对方向发生突变的射线路径也是适用的。因此无论反射、折射以至衍射的射线路径皆可用此原理预告出来。

① 这里所涉及的变分法概念可参阅 J. Mathews & R. L. Walker. Mathematical Methods of Physics. New York: Benjamin. 1965; 304～326; S. H. Crandall et al. Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems. New York: McGraw-Hill. 1968; 1～35; 417～424。可注意(2.94)式与分析力学中 Lagrange 方程之间、$L(\boldsymbol{x}_q, \boldsymbol{x})$与 Lagrange 密度之间以及 Fermat 原理与 Hamilton 原理之间的类似之处。

第 3 章　大气中的声传播——折射和反射

声传播是大气声学最根本的课题，广义来说，它几乎包罗了声波在大气中所经受的全部物理过程，诸如：从界面上的反射，温度梯度和风梯度所产生的折射，物体边缘和界面阻抗变化所导致的衍射，温度起伏和湍流起伏以及雨、雪、雾等微粒所引起的散射，各种损耗过程所造成的吸收等等。当然，只要相应的条件成立，这些过程实际上都是可以同时并存的，但为了便于研究，我们不得不分开来处理。本章所讨论的“传播”只是狭义的，即主要涉及反射和折射问题，而其前提是：大气只存在“宏观”的分层结构而暂时不考虑其“微观”的湍流结构；同时损耗过程均可忽略。

大气最主要特点之一就是处在不断的运动之中，对于不随高度变化的恒定的风(在气象学上不大可能)，只需用变换到“随风而动”的坐标系的办法(Galileo 变换)便可立即得到解；但实际上风的剖面非常复杂，尤其在边界层中更为多变，大体说来，从地面到边界层顶之间由于摩擦而使风速随高度对数性地增长，而风向则依据 Ekman 螺线而变；在此层顶上则主要受由水平压力梯度和 Coriolis 力所决定的地转风支配。求解复杂剖面下的折射问题归结为两类方法：(1)推广的波动方程对简单边界条件的全解，通常是用展开成各阶简正波模式的方法；(2)在某种判据(粗略说来是某些尺度如射线束直径和折射率梯度的倒数等比波长大得多；严格的判据详见第 7 章)下成立的射线法，这时撇开波动性质而只关心能流路径和能流密度。本章主要以射线观点来讨论大气中声波的反射和折射问题。

3.1　静止均匀介质中的声传播[60]

尽管大气在任何情况下都不能看成是静止的均匀介质，但对这种最简率情形的分析有助于对声波“大尺度行为”的理解，并为对更复杂情况的研究奠定概念基础。

由于 $\boldsymbol{v}=0$ 而 $c=\text{const}$，从射线寻迹方程(2.87)和(2.88)可看出射线速度 $d_t\boldsymbol{x}$ 以及 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 也都是常数，从而射线路径均为直线，这种情况(即使 $\boldsymbol{v}=\text{const}\neq 0$ 时也是如此)下服从“直线声传播”定律。

3.1.1　波前的参量描述

设一朝着 z 增长方向移动的波前在 $t=0$ 时由 $z=f(x,y)$ 给出，现在需要描绘出以后某一时刻 t 时的波前(参看图 12)。

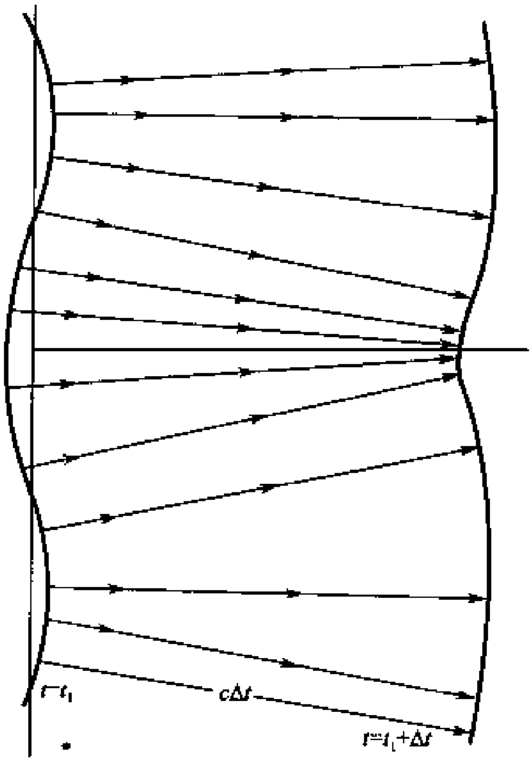


图 12　从 $t=0$ 时的给定波前构成时刻 t 时的波前

通过初始波前上某点 $\boldsymbol{x}_P$ 的射线沿波前法线方向 $\boldsymbol{n}$ 移动，这时

$$\boldsymbol{n}=\left\{\frac{\nabla[z-f(x,y)]}{|\nabla[z-f(x,y)]|}\right\}_{x=x_p}=\frac{\boldsymbol{e}_z-f_x\boldsymbol{e}_x-f_y\boldsymbol{e}_y}{(1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}} \tag{3.1}$$

其中，$f_x=\partial f/\partial x$，$f_y=\partial f/\partial y$；各个 $\boldsymbol{e}$ 各为其下标增长方向的单位矢，在时刻 t，射线位于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+ct\boldsymbol{n}$。如令 $x_P=\alpha$，$y_P=\beta$ 则此位置可写为

$$\boldsymbol{x}(\alpha,\beta,t)=\alpha\boldsymbol{e}_x+\beta\boldsymbol{e}_y+f(\alpha,\beta)\boldsymbol{e}_z+\frac{ct(\boldsymbol{e}_z-f_\alpha\boldsymbol{e}_x-f_\beta\boldsymbol{e}_y)}{(1+f_\alpha^2+f_\beta^2)^{1/2}} \tag{3.2}$$

这样，我们就通过参量 α 和 β 给出了 t 时刻波前的参量描述；对 α 和 β 的任一选取就生成波前上的一点，因此 Huygens 原理的构图法就由一分析表达式取代。

3.1.2　主曲率半径沿射线的变化

局部像一隋球形碗（凹的或凸的）或一马鞍形的任何曲面都有两个主曲率半径，如将曲面上任一点选作原点，并令 z 方向在此点垂直于曲面，则总可将 x 轴和 y 轴选取得使所选点附近的曲面可以用 x 和 y 的二次方组合来描述[①]

① 这可简单验证如下：在 xz 平面内半径为 r_1 并与 $z=0$ 平面相切的圆的方程为 $(z-r_1)^2+x^2=r_1^2$，当 $z\ll r_1$，$|x|\ll r_1$ 时即成为 $z=x^2/2r_1$。类似关系对于 yz 平面内半径为 r_2 的圆也成立。

$$z=\frac{x^2}{2r_1}+\frac{y^2}{2r_2} \tag{3.3}$$

其中 r_1 和 r_2(有可能为负的)为二主曲率半径。

r_1 和 r_2 沿一在静止、均匀介质中移动的射线上的变化可从(3.2)式推出,将坐标系选得使射线在 $t=0$ 时循 $+z$ 方向通过原点并使 $f(\alpha,\beta)$ 等于 $\alpha^2/2r_1^0+\beta^2/2r_2^0$(精确到 α 和 β 的平方项,上标 0 表初始值)。于是,精确到 α 和 β 的平方项,(3.2)式的 z 分量为

$$z=ct+\frac{\alpha^2}{2r_1^0}\left(1-\frac{ct}{r_1^0}\right)+\left(\frac{\beta^2}{2r_2^0}\right)\left(1-\frac{ct}{r_2^0}\right) \tag{3.4}$$

然而,精确到 α 和 β 的一次方项,(3.2)式的 x 分量和 y 分量分别为 $\alpha(1-ct/r_1^0)$ 和 $\beta(1-ct/r_2^0)$;因此,精确到 x 和 y 的平方项,我们有

$$z=ct+\frac{\frac{1}{2}x^2}{r_1^0-ct}+\frac{\frac{1}{2}y^2}{r_2^0-ct} \tag{3.5}$$

由于它与(3.3)式为同一形式,所以与主曲率半径相关联的方向沿任一给定射线保持恒定,半径本身在时间 t 内减小一个量 ct;或者,相当于:射线在行进一段距离 Δz 后各自减小 Δz。以上是假定波前沿射线方向是凹形时的结果,如是凸形或鞍形的,以致(比如说)$r_1^0<0$,则 $|r_1|$ 随传播距离增加,其增量等于沿射线距离的增加,波前曲率半径的减小与射线的聚焦相关联而其增加则与散焦相关联。

3.1.3 焦散面

(3.5)式表明:如果(比如说)$r_1^0>0$ 而 $r_2^0>r_1^0$,波前在 $t=r_1^0/c$ 时将发展成一尖顶(会切点)。出现这种情况的点也就是相邻射线相交的点,每个这样的点对应于从初始波前发出的给定射线,所有这些点的轨迹形成焦散面(图 13)。由于波前在其触及焦散面的点上有一尖顶,所以关于波前处处局部地类似一行进平面波的假定不再近似地正确,而几何声学的基本原则也不再适用。

可是几何声学对预言何处会出现焦散面却有其本质上的重要性,因为它表明何处会出现反常的高强度(大振幅),更由于焦散面的概念同样适用于不均匀介质中的射线,在大气声学中更有其独特意义。例如,对于一些因有噪声很大的活动(如大型火箭引擎的静态试验等),就要小心选择场所和气象环境,以使远处的居民点能避开可能形成的焦散面[71]。

由两支焦散面相交形成的特征尖顶有时称作"刃锋(arete)"[72]。在刃锋以外,两支焦散面之间的每一点上有三条(而不是一条)射线通过,而波前在此呈"折叠"形式[73]。

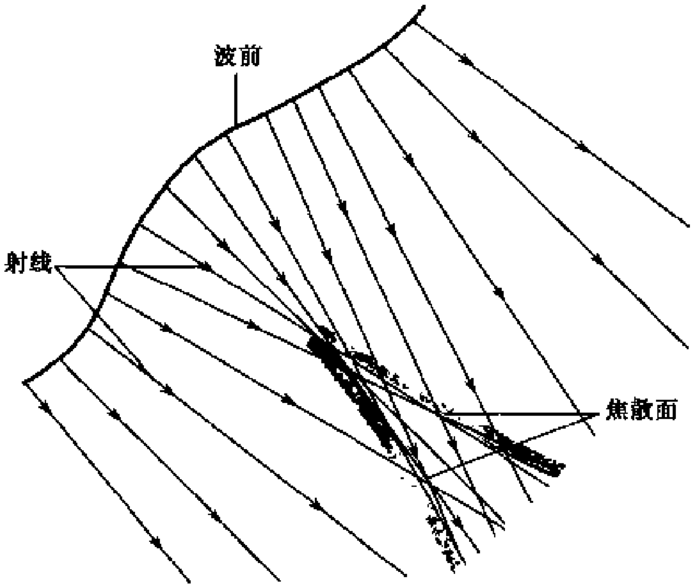


图 13　焦散面的形成

3.2　分层不均匀介质中的声折射

我们已一再指出大气是一种分层介质，即不仅表征其性质的参量(如密度、温度从而声速)而且表征其运动的风速都主要依赖于铅直坐标 z，于是声波在层与层之间的“界面”上就会像在两种不同介质分界面上那样反射和折射。但不同的是，这里的反射往往小至可以忽略、而折射是逐渐、连续发生的，相应的折射线是连续的、逐渐弯曲的线，而不是像在明确分界面上那样的“折断的直线”。

3.2.1　声速梯度造成的折射

设风速 $v=0$ 而声速 c 与时间无关，这时由(2.80)式第一式得出波延缓矢 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}/c$ 而寻迹方程组(2.87)～(2.88)简化为

$$\mathrm{d}_t \boldsymbol{x} = c^2 \boldsymbol{s}, \mathrm{d}_t \boldsymbol{s} = -\frac{\nabla c}{c} \tag{3.6}$$

为了确定声速梯度对射线变弯的影响，我们考虑最初循正 x 方向通过原点的射线，所以 $t=0$ 时 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e}_x/c(0)$，于是，精确到 t 的一次项，(3.6)式中第二式给出

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{c}(\boldsymbol{e}_x - \nabla c t) \tag{3.7}$$

其中 c 及其三个偏微商(c_x, c_y, c_z)均应被理解为在原点(0，0，0)取值，从关于 $\mathrm{d}_t y$ 和 $\mathrm{d}_t z$ 的方程相应地得出：对于很小的 t，y 和 z 都正比于 t^2，于是，因为 $x=ct$(精确

到最低幂次)，精确到 x 不为 0 的最低幂次，(3.6)式中第一式给出

$$y=-\frac{1}{2}\frac{c_y}{c}x^2, z=-\frac{1}{2}\frac{c_z}{c}x^2 \tag{3.8}$$

均为抛物线方程。

此外，再假设将坐标系选得使在 $x=0$处 $c_z=0$，而∇c 平行于 e_y，那么 $c_y>0$时射线路径局部地向负 y 方向弯曲，而 $c_y<0$ 时则向正 y 方向弯曲，在两种情形下射线路径的曲率半径均为 $c/|c_y|$(图 14)。

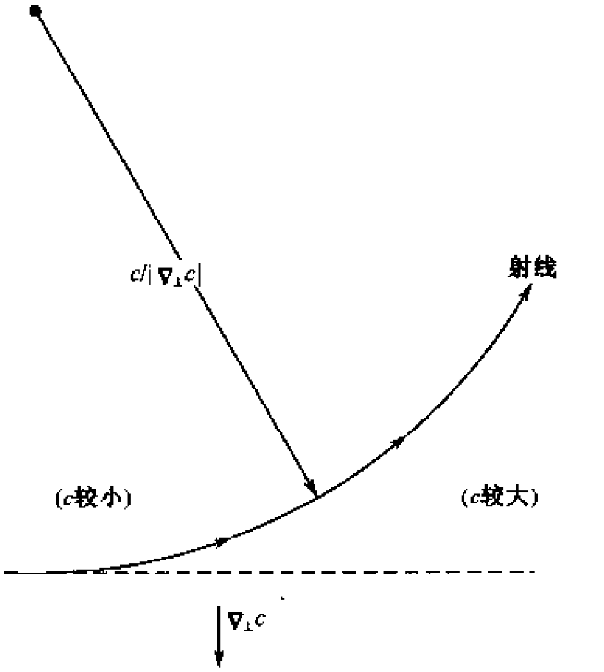


图 14 声速有空间变化的介质中射线路径的弯曲

上述讨论导致以下结论：如果声线在声速可变的介质中发生移动，当∇c垂直于传播方向的分量$\nabla_\perp c$ 不为 0 时，射线应弯离其传播方向，射线的弯曲发生在$\nabla_\perp c$ 和局部射线路径所决定的平面内，但偏离$\nabla_\perp c$ 的方向而朝向声速较小的一边，射线路径的曲率半径为 $c/|\nabla_\perp c|$ 或 $c/(|\nabla c|\sin\theta_0)$，这里 θ_0 为射线方向与∇c 方向之间的夹角，据此可以解释一种常识性的现象，即(以极端情况为例)冬季夜晚的户外听闻情况明显优于夏季正午，这是由于地面比热容小于空气比热容，因而在前一种情况下大气存在着温度(从而声速)的正梯度(随高度递增)而使声线弯向地面；后一种情况下则正好相反。

用波前概念也可说明射线之弯向声速较小的区域，因为波前在声速较小一边的那部分移动得较慢，所以整体波前必然向这一边倾斜，而保持与波前垂直的射线(已给定 $v=0$)就必然朝此方向弯曲。

在∇c 处处为常数的特殊情况下，相应的射线都是圆弧。为证明这一点，设 $c=c_0-az$，因而$\nabla c=-ae_z=\mathrm{const}$，这时射线只在 xz 平面内移动，所以 $s_y=0$，在(2.82)式中计及 $v=0$ 就给出 $s_z^2=c^{-2}-s_x^2$ 而由(3.6)式得出的关系 $s_z/s_x=\mathrm{d}_xz$ 给出

$$(\mathrm{d}_xz)^2-\frac{1}{c^2s_x^2}=-1 \tag{3.9}$$

另外，从(3.6)式中第二式得知 s_x 为常数，由圆方程的代数性质不难验明：(3.9)式的积分是一半径为 $1/as_x$ 的圆，其圆心在声速(外推到)为 0 的高度线 $z=c_0/a$ 上，

在通过该点的所有可能的射线之中，那些垂直于声速梯度而移动的射线弯曲得最厉害。

3.2.2　风速梯度造成的折射

即使是同一种介质，在其具有相对运动的两部分之间的分界面上也会发生反射和折射。现在就来研究这种由风速梯度造成的折射。

为此考虑在 $t=0$ 时通过原点、波前法线方向为 $\boldsymbol{n}_0$ 的射线，波延缓矢的相应初始值由(2.80)式确定；因此、精确到 t 的一次项，(2.88′)式的积分为

$$\boldsymbol{s} \approx (c+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_0)^{-1}[\boldsymbol{n}_0 - t\nabla(c+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_0)] \tag{3.10}$$

因而(2.87)式给出下列幂级数展开式：

$$\boldsymbol{x} \approx (c\boldsymbol{n}_0+\boldsymbol{v})t+\frac{1}{2}t^2[(\boldsymbol{v}_{\text{ray}}\cdot\nabla)(c\boldsymbol{n}_0+\boldsymbol{v})-c\nabla_{\perp}(c+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_0)] \tag{3.11}$$

其中$\nabla_{\perp}=\nabla-\boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{n}_0\cdot\nabla)$表示与 $\boldsymbol{n}_0$ 垂直的(横向)梯度，而 $\boldsymbol{v}_{\text{ray}}$ 为 $c\boldsymbol{n}_0+\boldsymbol{v}$((2.78)式)。所有系数和微商均应理解为在原点取值。

射线发生弯曲的平面内包含两个矢量 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{x}}$，它们是作为(3.11)式中 t 和 $\frac{1}{2}t^2$ 两项的系数出现的，射线向$\ddot{\boldsymbol{x}}$垂直于 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 的分量$\ddot{\boldsymbol{x}}_{\perp}$ 的方向弯曲；其曲率半径为 $\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}/|\ddot{\boldsymbol{x}}_{\perp}|$。

在许多实际情况下，风速 $\boldsymbol{v}$ 沿其吹动方向的变化均可忽略，即近似地$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=0$；再略去 $\boldsymbol{n}_0$ 与 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 的方向的微小差别，(3.11)式就给出

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_{\perp} \approx c[(\boldsymbol{n}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\nabla(c+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_0)_{\perp}] \approx -c\nabla_{\perp}c-c\boldsymbol{n}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{3.12}$$

上式特别适用于$|\boldsymbol{v}|\ll c$ 或 $\boldsymbol{n}_0$ 平行于$\boldsymbol{v}$ 的情形，由此关系可得出结论：射线弯曲的方向与$\nabla_{\perp}c+\boldsymbol{n}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$的方向相反，其曲率半径近似地等于 c 除以此矢量之量值。

作为一个例子，设 $\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{e}_x\cos\theta+\boldsymbol{e}_z\sin\theta$，而 c，v_x 和v_y 均依赖于 z，$v_z=0$，于是(3.12)式化为

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_{\perp}=-c(\mathrm{d}_z c\sin\theta+\mathrm{d}_z v_x)\boldsymbol{e}_2+c(\mathrm{d}_z v_y\cos\theta)\boldsymbol{e}_y \tag{3.12a}$$

其中 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_z\sin\theta-\boldsymbol{e}_x\cos\theta$ 为 xz 平面内垂直于$\boldsymbol{n}_0$ 的单位矢。$\ddot{\boldsymbol{x}}_{\perp}$的 y 分量同横向风所造成的射线横向漂移相关联；它通常是较为次要的，这或者是因为所关心的射线接近于水平($\cos\theta$ 很小)或者是因为这分量所引起的射线方向净偏移平均来说几乎是0，略去这一分量便得出射线的曲率半径[74]：

$$r_c=\frac{c}{\mathrm{d}_z c\sin\theta+\mathrm{d}_z v_x} \tag{3.13}$$

正值意味着向下弯曲；负值意味着向上弯曲。

在射线接近于水平方向行进的情况下可作进一步的近似，这时以 1 取代 $\sin\theta$，因而上述的 $c\sin\theta+v_x$ 就由 $c+v_x$ 代替，这就导致以下的简单规律：经受折射的射线就好像是在一无风但具有有效声速① $c_{\text{eff}}=c+v_x$（这里 v_x 为风速在包含射线的铅直平面内的 x 分量）的介质中移动一样。从这一观点来看，风速梯度和声速梯度对声线都有同样的影响，然而，如果 θ 小于（比如说）30°，则风速梯度的影响就比同样大小声速梯度的影响大得多。

引进有效声速概念后，寻常的 Snell 折射定律：声速与射线同界面法线所成角度 φ 的正弦之比为一不变量：

$$c/\sin\varphi = \text{const.} \tag{3.14}$$

就很自然地被推广到运动介质情形，这时只需以有效声速 $c_{\text{eff}}=c+v\sin\varphi$ 代替(3.14)式中的 v：

$$(c/\sin\varphi) + v = \text{const.} \tag{3.14a}$$

关于运动介质中反射和折射的详细讨论可参阅[75]。

作为小结，在图 15 上示意地绘出了温度梯度(a)和风梯度(b)造成射线弯曲的典型行为。

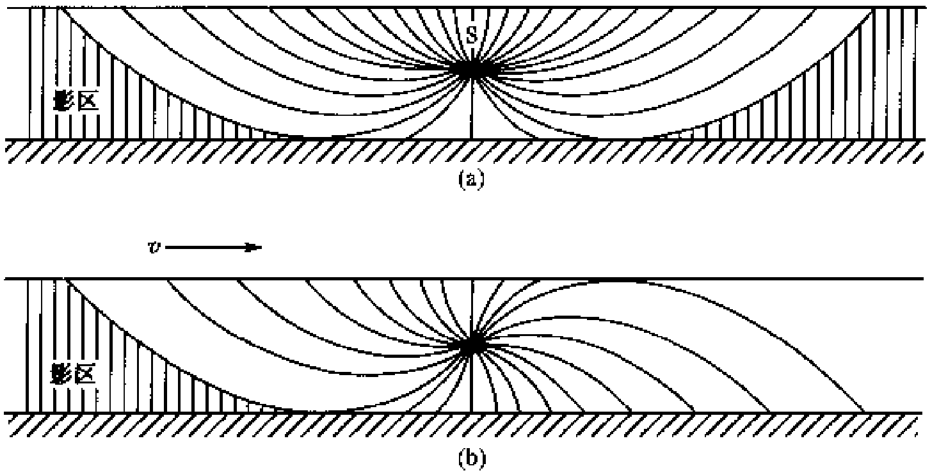


图 15　温度梯度和风速梯度所形成的射线弯曲和影区

(a)温度随高度递减的情形；(b)水平风速随高度递增的情形

3.3　大气中的声线

在一定的大气剖面（如图 4 中所示的）下积分射线寻迹方程是“几何大气声学”的基本课题之一，但只有少数几种“理想化”剖面可以得到封闭形式的解，而一般情

① 参阅绪论第 2.3 节。

况下只能借助于数值积分法。本节讨论分层大气模型中的一些基本现象和概念。

3.3.1　射线积分

对于分层介质，射线寻迹方程(2.88′)要求 s_x 和 s_y 沿任一给定射线均为常数，实际上这正符合推广的折射定律(3.14a)。此外，一旦指定了 s_x 和 s_y，s_z 就可以从程函方程(2.82)确定为高度 z 的函数，即

$$s_z = \pm\left[\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 - s_x^2 - s_y^2\right]^{1/2} \tag{3.15}$$

(注意：由于 $\boldsymbol{v}$ 不含 z 分量故 $1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}$ 与 s_z 无关)。这样，方程(2.88)就可以认为已被解出，而从(2.87)式可得[$\mathrm{d}_z x=\mathrm{d}_t x/\mathrm{d}_t z$；$\mathrm{d}_z t=1/\mathrm{d}_t z$][65]：

$$\mathrm{d}_z x = \frac{c^2 s_x + \Omega v_x}{c^2 s_z}, \quad \mathrm{d}_z t = \frac{\Omega}{c^2 s_z} \tag{3.16}$$

以及关于 $\mathrm{d}_z y$ 的类似方程。

由于(3.16)式右端只是 z 的函数，故直接积分就可确定 x，y 和 t 作为 z(以及作为 s_x 和 s_y)的函数，例如，

$$x = x_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{c^2 s_x + (1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})v_x}{c^2 s_z}\mathrm{d}z \tag{3.17}$$

其中 $x_0 \equiv x(z_0)$。

3.3.2　波导中的射线

在绪论第 2.3 节中曾提到大气剖面中存在着声速的极小值，它们对应于“大气波导(或声道)”。现在就可以用射线概念来处理这种波导传播。

图 16 的左边所示为一剖面中声速极小值的邻区，其右边为所对应的声线，可以看出声线被局限在两个高度之间，这两个高度均被称为“返转点”，在其处 $s_z^2 \to 0$；而在其间的区域内 $s_z^0 \geqslant 0$，这时对于一条实际的射线，其 x、y 和 t 均非 z 的单值函数，因每当射线到达返转点后 s_z 就要变号，射线的初始位置和方向决定了 s_x 和 s_y 以及 s_z 的初始符号，设 $1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}>0$，$s_z$ 就与 $\mathrm{d}_z t$ 同号(见(3.16)式)；因此对于斜着向上行进的射线它为正号面对于斜着向下的射线为负号。

设初始符号为正，这时(3.17)式以及关于 y 和 t 的类似关系描述出到达“上返转点高度”z_U 以前向上运行的射线轨迹。在 $z=z_U$ 上 s_z^2 第一次变为 0 而射线变成水平的并开始($s_z<0$)向下弯曲(全反射)，直至到达“下返转点高度”z_L。令 x_{U1}，y_{U1}，t_{U1} 为射线第一次到达 z_U 高度时相应的 x，y，t 值，则对于下一段射线轨迹的 x 后继值可给出为

$$x = x_{U1} + \int_{z}^{z_U} \frac{c^2 s_x + \Omega v_x}{c^2 |s_z|}\mathrm{d}z \tag{3.18}$$

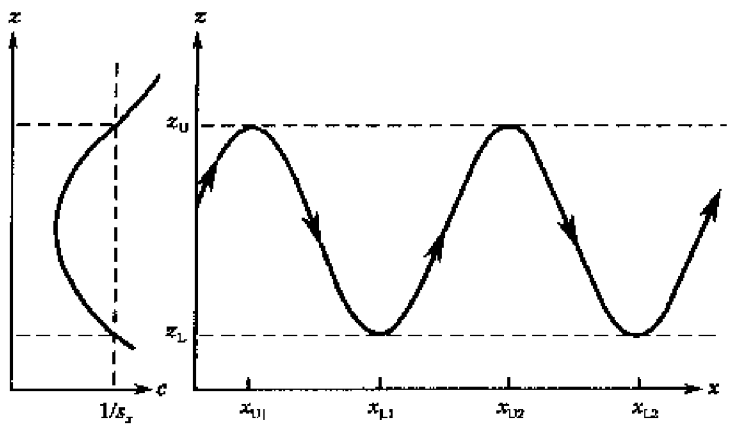


图 16 声速极小值附近(声道中)的射线

对于相应的 y 和 t 值也有类似关系,当射线到达 $z=z_L$ 时 s_z^2 再次变为 0 并开始变号。

应指出的是,虽然 $s_z(z_U)=0$,但像(3.18)式中那样的积分仍然是有限的,因当 $z\to z_U$ 时分母中的因子 $|s_z|$ 按 $(z_U-z)^{1/2}$ 趋于 0,故积分仍保持可积。

由此可见,射线(从而声能)完全(当然只是从射线声学观点来看)被局限在两个"完全反射"平面之间,就如同是在一"管道"中传播,这种传播的射线轨迹无论按时间还是按水平位移来说都是周期性的(各 x_U 和 x_L 相间地等距分布,如图 16 所示);对于 y 方向位移和行进时间情况也类似,射线的平均水平速度为

$$v_H=\frac{(\Delta x)_{L\to U}\boldsymbol{e}_x+(\Delta_y)_{L\to U}\boldsymbol{e}_y}{(\Delta t)_{L\to U}} \tag{3.19}$$

其中 $(\Delta t)_{L\to U}$ 表示从下返转点到上返转点所需的净时间。

3.3.3 "反常"传播

复杂多变的实际大气剖面会造成相应复杂的声线分布,有时就会出现所谓"反常传播"现象。这里"反常"指的是离声源较近的地方听不到声音而较远的地方反而能听到声音这种"违反常规"的现象。历史上最著名的例子要算 1921 年 9 月 21 日德国 Oppau 地方的军火库大爆炸,强烈的爆炸声传出数百千米之遥,根据事后对居民的调查,做出了如图 17 所示的听闻情况分布图[76]。从图上可看出:在离声源 300km 以外的许多地方都听到了声音,而许多相距不到 100km 的地方却反而未听到声音,形成一个宽度超过 100km 的"寂静区",在随后的理论解释[77]中,首先假定了对流层之上应有一逆温层,而不久即在实际探测中发现了平流层(同温层)的确存在。

为了解释这一现象,为简单起见略去横向风,以致从声源出发的射线均留在铅直平面内,这时波前法向单位矢 $\boldsymbol{n}$ 与铅垂线之间的夹角 θ 即满足

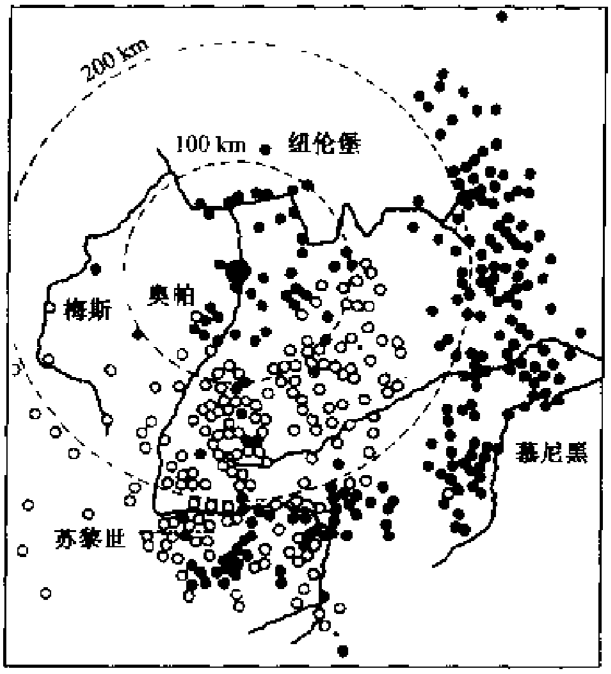


图 17　1921 年 9 月 21 日德国 Oppau 火药库大爆炸时
"闻声区"和"未闻声区"场点分布图
黑点(·)表示听到爆炸声的场点；圆圈(◦)表示未听到爆炸声的场点

$$s_x = \frac{\sin\theta}{c + v_x \sin\theta} = \text{const} \tag{3.20}$$

虽然射线方向一般与 $\boldsymbol{n}$ 的方向略有差别(参阅图 10)①，但当 $\boldsymbol{n}$ 为水平的时它也是水平的。于是，初始角为 θ_0 的射线当到达满足下式的返转点高度 z_{tp} 时弯向地面：

$$c(z_{tp}) + v_x(z_{tp}) = \frac{c_g}{\sin\theta_0} \tag{3.21}$$

这里 c_g 为地面声速(地面风速小至可忽略)。

由(3.21)式可知，要求从地面出发、到平流层再折返地面的射线路径存在，就必须在某一高度上 $c+v_x$ 超过地面声速 c_g。而事实上，例如，从图 4 的剖面上看出，这一条件是可以满足的，另外也可看出，在对流层中，$c+v_x$ 典型地随高度递减。因此在离声源中等距离处可以形成寂静区(影区)，相应的射线图绘在图 18[78] 上。由于地面的反射，声线形成循环，从而可以形成第二以至第三影区，但是愈往

① 这一差别虽然微小，却是有风区别于无风情形的一个重要标志。在历史上，Rayleigh 正是由于忽视了这一差别，而在研究风速随高度线性增长而声速处处为常数情形下的声传播时，不正确地得出声线方程为悬链线(实际应为圆弧)。这一错误虽在 20 世纪初就先后为若干学者指出，但由于 Rayleigh 的声望，这一错误还是在相当长一段时期内引起混乱。

后声线的相互交错也愈频繁,使影区也就愈来愈不明显了。影区效应有时也会被接近地面的局部气象条件(在离地面 3km 以内的剖面规律性较低)所抵消,但是,以仰角≥10°离开声源的射线一般要到达 30km 或更高的高度以后才会被折返地面。

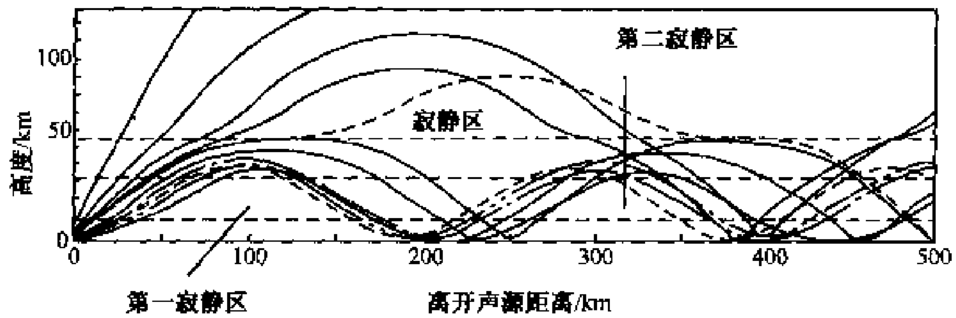


图 18 北半球夏季从东向西的代表性声射线图①

由测量被前扫过传声器阵的水平传输速度 $1/s_x$ 即可确定到达声线的视入射角 θ_0,而后由(3.21)式即求得 $c(z_{tp})+v_x(z_{tp})$,到达时间永远是显著迟于(通常约 1min)以声速直接沿地面传过来的"蠕波"(参阅第 4 章)。这种在几何声学考虑中被排除其存在的蠕波,其振幅很微弱但常可由灵敏的仪器探测到。

"可闻区"(在其中可接收到反常传播声)引人注目的特征是:它是在量级为 200km 的距离上突然开始的(见图 18)。这样一个"临界射程"的存在是由以射线理论算出"跳跃距离"(即射线在折回地面之前所运行的水平距离)$R(\theta_0)$的结果。当 $c+v_x$ 的剖面先是单调地减少到一极小值、然后再随高度增加直至在高度 z_m 处达到一极大值($>c_g$),这时对应于掠入射 $\theta=\pi/2$ 的射程 $R(\pi/2)$可达到 200km 的量级或更大。随着 θ_0 的减小,R 先随之减小直至达到某一极小值 R_{min};随后它又增加到 $R(\theta_{0,m})$,这里 $\theta_{0,m}$ 为使(3.21)式得出 $z_{tp}=z_m$ 的 θ_0 值。当 θ_0 减小到小于 $\theta_{0,m}$,射程突然发生一次大的跳跃[返转点位于高得多的高度上,其时 $c+v_x$ 再一次达到值 $c(z_m)+v_x(z_m)$],所以反常可闻区界于射程 R_{min} 与 $R(\theta_{0,m})$之间。由于 $R(\theta_0)$有一极小值,所以应有一焦散面在射程 R_{min} 处触及地面。因而在刚好位于反常可闻区内界之外的地方反常声最强。

实际上,早在 1708 年 Derham 就已注意到反常传播现象:当法国和荷兰双方海军在荷兰海岸外发生遭遇战时,远在数百公里之外的威尔士就能听到加农炮声,但他并未能察觉到更近距离处的寂静区。

① 见 Malone, T. F. (ed.). Compendium of Meteorology. American Meteorological Society. Boston, 1951:374。

3.4　静止介质中的振幅变化

3.4.1　静止均匀介质中的波振幅

首先考虑一恒定频率的声波在密度、声速均为常数的静止介质中传播这一最简单的情形。这时声压满足波动方程(2.6),并有一满足 Helmholtz 方程(2.14)的复振幅 $\hat{p}(x)$。引入 p 的 Fourier 变换 p①($\hat{p}(x)=P(x,\omega)e^{i\omega\tau(x)}$),即由(2.14)得到

$$\nabla^2 P+i\omega(2\nabla P\cdot\nabla\tau+P\nabla^2\tau)-\omega^2 P\left[(\nabla\tau)^2-\frac{1}{c^2}\right]=0 \tag{3.22}$$

为了在高频极限下求解上述方程,假定存在一 P 的渐近展开式:

$$P(x,\omega)=P_0(x)+\frac{1}{\omega}P_1(x)+\frac{1}{\omega^2}P_2(x)+\cdots \tag{3.23}$$

以之代入(3.22)式,并令 ω 每一幂次的系数恒等于0,如此导出的方程的无限系列中开头两个方程只包含 τ 和 P_0;假定 P_0 为 P 的一恰当近似,于是可以只保留开头这两个方程并在其中以 P 代替 P_0;结果得到的方程为

$$\begin{gathered}(\nabla\tau)^2=\frac{1}{c^2}\\ 2\nabla P\cdot\nabla\tau+P\nabla^2\tau=0\ \text{或}\ \nabla\cdot(P^2\nabla\tau)=0\end{gathered} \tag{3.24}$$

可注意到:这两个方程也可在(3.22)式中令 ω^2 和 ω 的系数为0而得到;(3.24)中第二式的后一种形式系将第一形式乘以 P 后所得。

(3.24)中第一式就是介质运动速度为0时的程函数方程(2.28),所以它的解可以射线形式给出。一旦指定任一波前曲面和与其相关联的 τ 值,对任一位置 x 的 $\tau(x)$ 值就可由求出联结原来指定波前与该点 x 之间的射线确定出。如果射线通过原指定波前上的点 x_0,并且 $\tau(x_0)=\tau_0$,那么 $\tau(x)$ 就是 τ_0 加上以速率 c 沿射线从 x_0 到 x 的运行时间。

(3.24)中第二式的解可利用"射线管截面"求出,可将从 x_0 通到 x 的射线与一射线管联想起来:此管由通过以 x_0 为中心垂直于射线路径的小面积 $A(x_0)$ 的所有射线组成;当射线管到达 x 时其截面积变为 $A(x)$(图19)。将(3.24)中第二式遍及联结 x_0 和 x 的射线管段的体积积分,并应用 Gauss 定理将其转换为一面积分,由于射线管段路径处处循着方向 $\nabla\tau=s$,则通及射线管段侧面的面积分恒等于0,而只剩下两端的贡献,因而

$$P^2(x_0)A(x_0)(\nabla\tau\cdot n)_{x_0}=P^2(x)A(x)(\nabla\tau\cdot n)_x$$

① 这一处理借用于光学,例如,参阅 A. Sommerfeld and J. Runge, Application of vector calculus to the fundamentals of geometrical optics, Ann. Phys., 1911, (4)35: 277~298。

其中，$\boldsymbol{n}$ 为射线方向单位矢，由于介质无运动，所以也就是波前法向的单位矢，但由于$\nabla\tau\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}$在这里就是$1/c$(见(2.80)式)，并因$c$为常数，故上式即化为

$$P(\boldsymbol{x})=P(\boldsymbol{x}_0)\left[\frac{A(\boldsymbol{x}_0)}{A(\boldsymbol{x})}\right]^{1/2} \tag{3.25}$$

由此可见，波振幅沿射线的变化反比于射线管截面积的平方根，如射线管截面积收缩(聚焦)，则振幅增加。

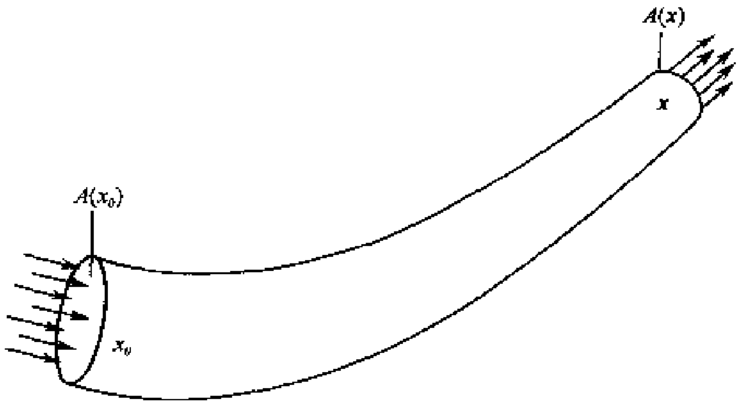


图 19 射线管示意图

$\nabla^2\tau$ 遍及射线管段的体积分可类似地求出为$(1/c)[A(\boldsymbol{x})-A(\boldsymbol{x}_0)]$，因此，对于长度为 dl 的任一短的管段(其体积近似地为 $A(\boldsymbol{x})dl$)，即得

$$\nabla^2\tau=\frac{1}{cA}\mathrm{d}_lA \tag{3.26}$$

其中，$A(l)$为沿射线距离 l 处的射线管截面积。再者，如将坐标系选择得使其 z 轴指向射线方向而 x 轴和 y 轴均在主曲率方向，并将所研究的点取作原点，则在该点附近，方程(3.3)给出

$$\tau\approx\mathrm{const}+\frac{1}{c}\left(z-\frac{x^2}{2r_1}-\frac{y^2}{2r_2}\right) \tag{3.27}$$

其中 r_1 和 r_2 分别为原点处波前的两个主曲率半径(凹面情况下为正，反之为负)。因而结果得到

$$c\nabla^2\tau=-\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) \tag{3.28}$$

此外，因为 $r_1=r_1^0-l$ 而 $r_2=r_2^0-l$(由(3.5)式可得)，故可用 $\mathrm{d}_l(\ln r_1)$来取代$-1/r_1$，对于$-1/r_2$ 亦可作类似取代，而由(3.26)式可用 $\mathrm{d}_l(\ln A)$取代 $c\nabla^2\tau$。将(3.28)积分就导致下述结论：(A/r_1r_2)与 l 无关，所以(3.25)式中的射线管截面积之比就同比值 $r_1^0r_2^0/r_1r_2$ 一样，从而沿射线的振幅就是

$$P(\boldsymbol{x})=\left[\frac{r_1^0r_2^0}{(r_1^0-l)(r_2^0-l)}\right]^{1/2}P(\boldsymbol{x}_0) \tag{3.29}$$

按反比于波前二主曲率半径的几何平均而变化。

上述讨论可被推广到不同频率波之叠加或一瞬时波形的情形。因为射线路径和运行时间与频率无关，并因射线路径上不同点处的振幅也与频率无关，所以波动方程在几何声学近似下的解为

$$p = \hat{p}(l,\xi)f(t-\tau,\xi)$$

其中参量 ξ（或者，严格地讲，应是一对参量 ξ_1,ξ_2）区别开不同的射线。波形 $f(t-\tau,\xi)$沿任一给定射线保持不变，但振幅因子 $\hat{p}(l,\xi)$沿射线距离而变。如将 $f(t-\tau,\xi)$选取得使其在射线的起始点（$l=0$）处等于 $p(x,t)$，则 $\hat{p}$ 就是（3.29）式中 $P(\boldsymbol{x}_0)$的系数而 τ 就是 τ_0+l/c。

3.4.2　沿射线的能量守恒：推广到缓变介质

对于 $c(\boldsymbol{x})$和 $\rho(\boldsymbol{x})$均为位置的缓变函数的介质（但仍假定为静止的），上述推导亦可类似地进行，但我们另换一种基于声能量守恒的推导可能更有启发性。

首先我们假定

$$p(\boldsymbol{x},t) = \hat{p}(\boldsymbol{x})f(t-\tau,\xi) \tag{3.30}$$

其中 τ 为程函方程的解而 ξ 为沿任一给定射线的一常数。欲上式表述在任一局部区域内传播的平面波，其所引起的流体速度必须认定为$(\boldsymbol{n}/\rho c)p$ 或$(\hat{p}/\rho)\nabla\tau f$（因 $\boldsymbol{n}=c\nabla\tau$）。因而与这一波扰动相关联的能量密度和声强可由（2.17）式和（2.18）式定出

$$E = \frac{\hat{p}^2}{\rho c^2}f^2(t-\tau,\xi),\boldsymbol{I} = \boldsymbol{n}cE \tag{3.31}$$

其中利用了程函方程[（3.24）中第一式]，声能守恒定律（2.19）就给出

$$2\frac{\hat{p}^2}{\rho c^2}f\partial_t f + f^2\nabla\cdot\left(\frac{\hat{p}^2}{\rho}\nabla\tau\right)+2\frac{\hat{p}^2}{\rho}(\nabla\tau\cdot\nabla f)f = 0 \tag{3.32}$$

如略去 f 通过 $\xi(\boldsymbol{x})$对位置的非常弱的依赖关系，则$\nabla f=-\partial_t f\nabla\tau$；上式中第一项与第三项相互抵消（再次利用程函方程）而只剩下中间一项

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{p}^2}{\rho}\nabla\tau\right)= 0 \tag{3.33}$$

将上式遍及一射线管积分，则以类似于导出（3.25）式的方式可得出结论：$(\hat{p}^2/\rho c)A$这个量沿任一射线管为常数（A 为射线管截面积）。因此，如 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}$ 为同一射线上的任意二点

$$\hat{p}(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{(A/\rho c)_{x_0}}{(A/\rho c)_x}\right]^{1/2}\hat{p}(\boldsymbol{x}_0) \tag{3.34}$$

给出静止不均匀介质中声压振幅沿一射线变化的普遍定律。对于一恒定频率的波，这一关系可被诠释为下述要求：单位时间内沿一射线管流过能量的时间平均值

应与沿射线的距离无关。这一定律有时被称为声波的 Green 定律①。

3.5 运动介质中的振幅变化

3.5.1 运动介质中的声波方程

为了确定介质的稳定、但不均匀运动在几何声学近似下对波振幅的影响，首先必须导出这种情况下的声波方程。为此，仍从流体动力学基本方程组出发，但与第2章第1.1节中不同的是，除 $\boldsymbol{v}_0$ 不再等于0以外，还由于介质的不均匀性而不能再用形式为(1.12)的状态方程(这时熵 $s_0 \neq \text{const}$)，而必须采用普遍的状态方程 $p = p(\rho, s)$ 和熵连续性方程(1.35a)；其余两个方程则仍然是 Euler 方程(1.30a)和连续性方程(1.31′)。

将声波扰动(2.1)式代入这些方程，则在只保留声扰动量的一次项(线性化处理)后得到

$$\left.\begin{aligned}
&D_t \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla} p_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\boldsymbol{\nabla} p_0 = 0 \\
&D_t \rho_1 + \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho_0 + \rho_1 \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}_0 + \rho_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}_1 = 0 \\
&D_t s_1 + \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla} s_0 = 0 \\
&p_1 = c^2 \rho_1 + (\partial_s p)_0 s_1
\end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

现在的声速 c 和热力学系数 $(\partial_s p)_0$ 均为位置的函数。

类似于第2章第1.1节中所做过的那样，在方程组(3.55)中各方程之间作代换：利用第4式从第1、2两式中消去 ρ_1，关于第2式中的第一项和第三项，这一代换给出

$$c^2(D_t\rho_1 + \rho_1 \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}_0) = D_t p_1 - (\partial_s p)_0 D_t s_1 + c^2 p_1 \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{v}_0}{c^2} - c^2 s_1 \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\boldsymbol{v}_0}{c^2}(\partial_s p)_0\right]$$

(3.35)中第4式是 p_1，ρ_1 和 s_1 之间的关系式，同一关系式对于 $\boldsymbol{\nabla}p_0$，$\boldsymbol{\nabla}\rho_0$ 和 $\boldsymbol{\nabla} s_0$ 也应成立，于是由第3式得到

$$-(\partial_s p)_0 D_t s_1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla} p_0 - c^2 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho_0$$

而第2式化为

$$D_t p_1 + \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla} p_0 + c^2 p_1 \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{v}_0}{c^2} + \rho_0 c^2 \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}_1 - c^2 s_1 \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\boldsymbol{v}_0}{c^2}(\partial_s p)_0\right] = 0 \tag{3.36}$$

① 该定律是由 G. Green 在浅水的水波中发现的，可参阅原始文献 On the motion of waves in a canal of variable depth and width. Trans. Camb. Phil. Soc. 1837，或 N. M. Ferrers(ed.). Mathematical Papers of the Late George Green. London：Macmillan, 1871：225～230。

由于是缓变介质，描述其状态各量的空间微商都很小，因而其二阶项均可略去，对于均匀介质中的声波，s_1 应为0，而现在它不等于0是由于介质状态各量的空间变化，因而 s_1 也是一阶量，从而(3.36)式中的最后一项就是二阶量而可略去，最后结果为

$$
\begin{aligned}
&D_t \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 - \frac{p_1}{(\rho_0 c)^2}\nabla p_0 = 0 \\
&D_t p_1 + \boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla p_0 + c^2 p_1 \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{v}_0}{c^2} + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

3.5.2　波作用量守恒

对上述方程作某些进一步的近似可导出类似于均匀介质中声波能量的守恒关系。

将(3.37)中第1式点乘以 $\rho_0 \boldsymbol{v}_1$，再与乘以 $p_1/\rho_0 c^2$ 的第2式相加后给出

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)E - v_1^2(\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\frac{\rho_0}{2} - p_1^2(\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)(2\rho_0 c^2)^{-1} \\
&+ \nabla \cdot \boldsymbol{I} + \rho_0 \boldsymbol{v}_1 \cdot [(\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_0] + \frac{p_1^2}{\rho_0}\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{v}_0}{c^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

其中 E 和 $\boldsymbol{I}$ 分别表示随介质一起运动的坐标系中所观察到的声能密度和声强，从而它们分别由(2.17)式和(2.18)式给出。如果我们只关心处处都局部类似一平面行波的声场，那么在所有包含介质参量空间微商的各较小的项中，在与上述近似相一致的情况下，可令 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{n} p_1/\rho_0 c$ 而 $p_1^2 = \rho_0 c^2 E$（这两个关系在均匀介质情形下严格成立，即使 $\boldsymbol{v}_0 \neq 0$）这一代换给出

$$
\begin{aligned}
&\partial_t E + \boldsymbol{v} \cdot \nabla E - E\left[\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\frac{\rho}{2} + \rho c^2(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)(2\rho c^2)^{-1}\right] \\
&+ \nabla \cdot \boldsymbol{I} + E\boldsymbol{n} \cdot [(\boldsymbol{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}] + c^2 E \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

其中 ρ 和 $\boldsymbol{v}$ 的下标0由于不会与其他量相混而重新被略去。

至于(3.39)式中倒数第二项，单位矢 $\boldsymbol{n}$ 可按(2.80)中第二式换写为 $(c/\Omega)\boldsymbol{s}$，而 $\boldsymbol{s} = \nabla\tau$。而由矢量分析公式知

$$
\boldsymbol{s} \cdot [(\boldsymbol{s} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}] = (\boldsymbol{s} \cdot \nabla)(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot [(\boldsymbol{s} \cdot \nabla)\boldsymbol{s}]
$$

这两项中的第一项中的 $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v}$ 可代换为 $1 - \Omega$，而第二项中的 $(\boldsymbol{s} \cdot \nabla)\boldsymbol{s}$ 则由(2.84)式可代换为 $\frac{1}{2}\nabla(\Omega^2/c^2)$，因而得到

$$
\boldsymbol{n} \cdot [(\boldsymbol{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}] = \Omega c\boldsymbol{n} \cdot \nabla \frac{1}{\Omega} + \frac{\Omega}{c}\boldsymbol{v} \cdot \nabla \frac{c}{\Omega} \tag{3.40}
$$

在与导出(3.39)式的同一近似程度下，在像 $E\boldsymbol{n} \cdot \nabla(1/\Omega)$ 这样的项（当介质为均匀

的时这一项为 0)中,可令 $nE=\boldsymbol{I}/c$,于是,在上面刚刚提到的代换下,(3.39)式化为

$$\partial_t E+\boldsymbol{v}\cdot\nabla E+E\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left[\ln\rho^{-1/2}+\ln(\rho c^2)^{1/2}+\ln\frac{c}{\Omega}\right]$$

$$+\nabla\cdot\boldsymbol{I}+\Omega\boldsymbol{I}\cdot\nabla\frac{1}{\Omega}+c^2E\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}=0$$

在进一步的演算后,上式给出

$$\partial_t\left(\frac{E}{\Omega}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{I}+E\boldsymbol{v}}{\Omega}\right)=0 \tag{3.41}$$

容易看出,当 $\boldsymbol{v}=0$ 时,上式即还原为均匀介质中的声能守恒定律①(见(2.19)式),虽然这里每项都多出一个附加因子 $1/\Omega$,但(3.41)式仍是一守恒定律,因为它是一时间微商与一空间散度之和。要说明是哪个物理量守恒,可考虑恒定频率的情形,并将该式两端各乘以 $1/\omega$,使得到的方程类似于(3.41)式,只是 Ω 为 $\omega\Omega$ 所代替。$\omega\Omega$ 或 $\omega-\omega\boldsymbol{v}\cdot\nabla\tau\equiv\omega^*$ 这个量可看成是附着于运动流体上的坐标系中所观察到的频率(禀性频率),因为对 $\exp[-\mathrm{i}\omega(t-\tau)]$施加算符 D_t 的运算就相当于乘以 $-\mathrm{i}\omega^*$。以 $t-\tau(\boldsymbol{x})$取代 t 的这一指数因子描述出一恒定频率扰动在几何声学近似下占主导地位的空间依赖关系;$p(\boldsymbol{x},t)$所取形式应为$\hat{p}(\boldsymbol{x})\exp[-\mathrm{i}\omega(t-\tau)]$之实部,这里 $\hat{p}(\boldsymbol{x})$为位置之缓变函数。

类比于以 Hamilton 算符描述的力学系统,量 E/ω^* 类似于单位体积的作用变量而可称之为波作用量密度(单位体积的波作用量,因而$(\boldsymbol{I}+E\boldsymbol{v})/\omega^*$ 就是波作用量通量),而守恒关系(3.41)(在其中以 ω^* 代换 Ω)就可看成是**波作用量守恒定律**,虽然在这里它是对稳定流情况推出的,但也适用于在缓变介质(其性质为位置和时间的缓变函数)中行进的频率接近恒定的波包[79]。当波包移动时,在静止坐标系中观察到的频率会由于声速依赖于时间和介质在运动这双重原因而变化。但如 E 和 I 如上文那样定义,并如 ω^* 取作运动坐标系中观察到的频率(同样依赖于时间),那么波作用量守恒律仍然成立。这一状似有理的断言应当是很明显的,因为对于静止观察者看来是均匀的、与时间无关的流动对于随介质一起运动的观察者来说就会是随时间变化的了。由于 $E,\boldsymbol{I}$ 和 ω^* 都是坐标系变换下的不变量,所以 $\Omega\to\omega^*$ 的(3.41)式也应如此。

---

① 尽管(3.41)式是近似得出,并且只在几何声学近似下成立,但严格的声能关系(形式也是时间微商与空间散度之和)对稳定运动不均匀介质情形的推论的确存在:(1)最终表式中包含"Clebsch 势"(不是声场的局部特性),可参阅 W. Möhring, Z. Angew. Math. Mech. ,1960,50:T196~198;J. Sound Vib. ,1971,18:101~9 和 1973,20:93~101。(2)适用于具势等熵运动的较简单推论,可参阅 Л. А. Цернов,ЖТФ,1946,16:733~6;R. W. Cantren and R. W. Hart. J. Acoust. Soc. Am. 1964,36:697~706。(3)关于运动流体的其他能量表述,可参阅 O. S. Ryshov & G. M. Shefter. J. Appl. Math. Mech. (USSR),1962,26:1293~1309 和 C. L. Morfey. J. Sound Vib. ,1971,14:159~170。

3.5.3 Блохинцев 不变量

如选定一坐标系使周围介质性质不依赖于时间，形式如(3.41)式的**波作用量**守恒定律的优点就在于它也适用于瞬时扰动。因此，如设

$$p_1 = P(\boldsymbol{x})f(t-\tau(\boldsymbol{x}),\xi),\ \boldsymbol{v}_1 = \frac{p_1}{\rho c}\boldsymbol{n} \tag{3.42}$$

其中，f 为一任意函数(但主要由高频构成)，而 ξ 沿任一给定射线为常数；则将(3.42)式代入(3.41)式后即得到一关于 $P(\boldsymbol{x})$ 的方程。按此步骤并略去含$\nabla\xi$ 的各项，即得到

$$\begin{gathered}E = \left(\frac{P^2}{\rho c^2}\right)f^2,\quad \boldsymbol{I}+E\boldsymbol{v} = E\boldsymbol{v}_{\text{ray}}\\ \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{I}+E\boldsymbol{v}}{\Omega}\right) = f^2\,\nabla\cdot\left(\frac{P^2\boldsymbol{v}_{\text{ray}}}{\rho c^2\Omega}\right) - 2\left(\frac{P^2\boldsymbol{v}_{\text{ray}}}{\rho c^2\Omega}\right)\cdot\nabla\tau f\partial_t f\end{gathered} \tag{3.43}$$

其中$\boldsymbol{v}_{\text{ray}}$由(2.78)式定义，并由(2.79)式可知$\boldsymbol{v}_{\text{ray}}\cdot\nabla\tau=1$，故(3.43)式右端第二项即为$-\partial_t(E/\Omega)$，而(3.41)式给出

$$\nabla\cdot\left(\frac{P^2\boldsymbol{v}_{\text{ray}}}{\rho c^2\Omega}\right) = 0 \tag{3.44}$$

此为几何声学基本方程之一，如介质速度为0，上式即还原为(3.33)式。

如将(3.44)式遍及一射线管段的体积积分并重复在第4.1节中所进行过的步骤，即可得到下述结论：沿截面积 A 可变的、任一给定的无限小射线管，Блохинцев 不变量[80]

$$\frac{P^2\boldsymbol{v}_{\text{ray}}A}{(1-\boldsymbol{v}\cdot\nabla\tau)\rho c^2} = \text{const} \tag{3.45}$$

为常数。

应用(3.45)式可以解释一些常见现象。例如，它可以部分地解释从一喷嘴喷出的射流所造成噪声场的“反常”分布：在与射流轴成小角度的较远距离处为“相对安静”的区域[81,82]。类似地可以解释一个更为人熟知的现象：对于地面附近声源所发出的声音，在顺风方向听起来总是比逆风方向响[4,83]。风速随高度而增加，所以向顺风方向接近水平地出发的声线都被折射向下弯；从而声强随距离的减弱会少于按球面扩展的“反平方规律”，而对于逆风方向则情况相反。

3.6 声波在两种介质分界面上的反射

在此之前讨论的都是声在无界大气中的传播，而没有考虑地面的影响。实际上这种影响，特别是对低层大气中的传播，是非常重要的，为此我们开始研究两种介质分界面上某高度 z_0 处一各向同性点声源(图20)所形成的声场。

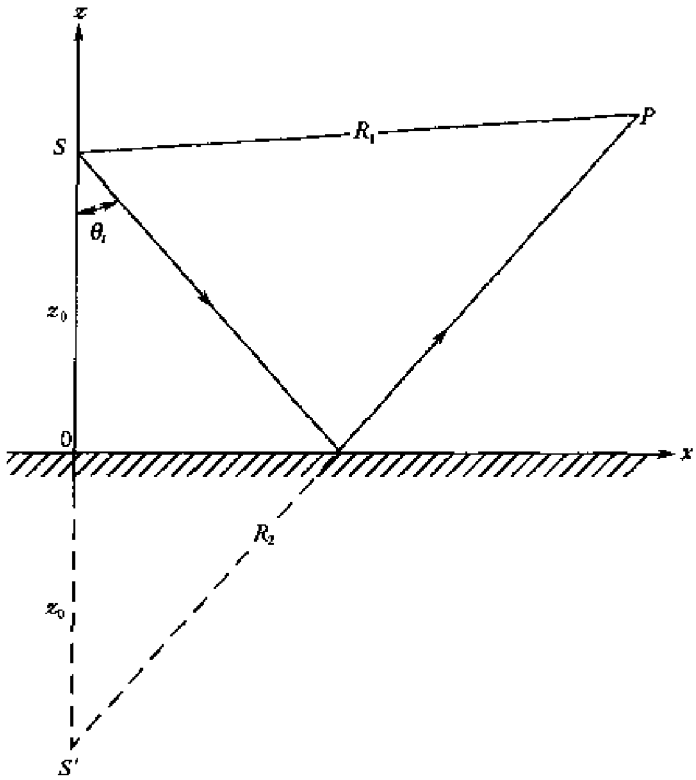


图 20 平面界面上方的点声源

3.6.1 平面波从刚性界面的反射

如图 20，平面波

$$p_i = f\left(t - \frac{1}{c}\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{x}\right), \quad \boldsymbol{v}_i = \frac{p_i}{\rho c}\boldsymbol{e}_i \tag{3.46}$$

入射到刚性平面 $z=0$ 上；$\boldsymbol{e}_i$表示其入射方向上的单位矢，由于可认为它没有 y 分量，故

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_x \sin\theta_i - \boldsymbol{e}_z \cos\theta_i \tag{3.47}$$

θ_i(入射角)为 $\boldsymbol{e}_i$与指向平面内部的法向矢$-\boldsymbol{e}_z$之间所成角度。

如(3.46)式是平面 $z=0$ 不存在时波动方程(2.6)的解，那么当平面存在时的解(可写为 p_i+p_r，$\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_r$)必须使 p_r，$\boldsymbol{v}_r$ 本身也是(2.6)的解。再者，$z=0$ 处的边界条件$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_z=0$ 要求 $z=0$ 时$(\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_r)\cdot\boldsymbol{e}_z=0$。在这一特殊情况下，反射波的解很容易从另一边界条件：$z=0$ 时$\partial_z p=0$ 得到，这个边界条件在①

$$p_r(x,y,z;t) = p_i(x,y,-z;t) \tag{3.48}$$

时被满足，这时和 p_i+p_r 对 z 来说是对等的，因而其对 z 的微商在 $z=0$ 处等于 0。

---

① 这表现为“镜像法”的一个例子，这方法最初是由 Euler 在 1759～1767 年间提出的。

由于 $p_i(x,y,z;t)$ 由(3.46)式给出，故 p_r 即成为 $f\left(t-\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{x}\right)$，这里 $\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_i$ 的区别在于其 z(法向)分量异号，即 $\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_x\sin\theta_i+\boldsymbol{e}_z\cos\theta_i$。$\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_z$ 之间的角度也是 θ_i：反射角等于入射角(镜律)。

类似于(3.46)式，在 $\boldsymbol{e}_r$ 方向传播的平面波 $f\left(t-\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{x}\right)$ 所引起的流体粒子速度即为

$$\boldsymbol{v}_r=\frac{\boldsymbol{e}_r}{\rho c}f\left(t-\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{x}\right)=\frac{\boldsymbol{e}_r}{\rho c}p_r \tag{3.49}$$

它满足 $z=0$ 处的边界条件 $(\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_i)\cdot\boldsymbol{e}_z=0$。

从上述解可推断出：在 $z=0$ 上，总的波扰动所造成的声压和粒子速度切向分量都正好是仅有入射波时相应量的两倍，如入射波的频率恒定，那么

$$p_i+p_r=\mathrm{Re}[\hat{p}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z})]=2\cos(kz\cos\theta_i)f\left(t-\frac{1}{c}x\sin\theta_i\right) \tag{3.50}$$

其中 $k=\omega/c$，$k_x=k\sin\theta_i$，$k_z=k\cos\theta_i$，于是，每当 $kz\cos\theta_i$ 是 $\pi/2$ 的奇数倍时，入射波与反射波就相互抵消。

3.6.2　平面波从比声阻抗有限的平面上的反射

现在将上述讨论推广到界面的比声抗 Z 是有限的(并有可能依赖于入射角)情形，仍然从(3.46)式和(3.47)式出发，总声场仍由入射波和反射波组成；但现在的反射波为 $g\left(t-\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{x}\right)$，函数 g 不一定同入射波形 $f(t)$ 一样。

如将 $f(t)$ 看成是一种叠加，例如是恒定频率成分组成的 Fourier 级数，任一这种成分具有形式 $\mathrm{Re}\hat{f}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$。将声压振幅反射系数定义为 $\mathscr{R}(\theta_i,\omega)$，使得量 $\mathrm{Re}\,\mathscr{R}(\theta_i,\omega)\hat{f}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 就是 $g(t)$ 的相应成分，这样 $\hat{g}=\mathscr{R}(\theta_i,\omega)\hat{f}$。或者，如果 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都是瞬时波形，$\mathscr{R}(\theta_i,\omega)$ 就是 $g(t)$ 和 $f(t)$ 二者 Fourier 变换之比。无论在哪种情形，我们都可写出

$$\begin{aligned}\hat{p}&=\hat{f}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}+\mathscr{R}(\theta_i,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}]\\ \hat{v}_z&=\frac{\cos\theta_i}{\rho c}\hat{f}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}[-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}+\mathscr{R}(\theta_i,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}]\end{aligned} \tag{3.51}$$

$z=0$ 上的边界条件为 $\hat{p}/(-\hat{v}_z)=Z(\omega)=$ 界面比声阻抗(单位面积声阻抗)，它给出

$$\frac{Z(\omega)\cos\theta_i}{\rho c}=\frac{1+\mathscr{R}(\theta_i,\omega)}{1-\mathscr{R}(\theta_i,\omega)},\quad \mathscr{R}(\theta_i,\omega)\ \frac{\zeta(\omega)\cos\theta_i-1}{\zeta(\omega)\cos\theta_i+1} \tag{3.52}$$

其中 $\zeta(\omega)\equiv Z(\omega)/\rho c$ 表示比声阻抗与介质特性阻抗之比，或称法化特性阻抗。

当仅当 Z 的实部为正时 $\mathscr{R}$ 的量值便小于 1，具有这一性质的任何界面都吸收声能。流入界面每单位面积声功率的时间平均（对于一单频成分）等于[①] $\frac{1}{2}\mathrm{Re}\hat{p}(-\hat{v}^{\dagger})=\frac{1}{2}|-\hat{v}|^2\mathrm{Re}Z(\omega)$（† 表示复共轭），以(3.51)式代入后即得

$$[p(-v_z)]_{av}=\frac{1}{2}\frac{\cos\theta_i}{\rho c}|\hat{f}|^2(1-|\mathscr{R}|^2) \tag{3.53}$$

（因$(1+\mathscr{R})(1-\mathscr{R}^{\dagger})$之实部即为 $1-|\mathscr{R}|^2$）。如 $\mathrm{Re}Z(\omega)>0$，或等效地如 $|\mathscr{R}|<1$，则界面即为吸收声能。

表式$\frac{1}{2}|\hat{f}|^2(\cos\theta_i)/\rho c$ 给出入射波在单位时间内带进界面每单位面积的能量，此量乘以 $|\mathscr{R}|^2$ 后即给出反射波单位时间内带出界面每单位面积的能量。因此(3.53)式就说明下述原理：按时间平均来说，入射声能等于反射声能与吸收声能之和，被吸收的份额为吸收系数 $\alpha(\theta_i,\omega)$；它的值在这里就是$[p(-v_z)]_{av}$除以 $\frac{1}{2}|\hat{f}|^2(\cos\theta_i)/\rho c$，或者等效地就是 $1-|\mathscr{R}|^2$，$|\mathscr{R}|^2$ 为能量反射系数。

如声压振幅反射系数$\mathscr{R}$ 等于 1，那么上面给出的反射波表式就使得在 $z=0$ 上 $\hat{v}_z=0$，而这正是刚性界面反射的情形。因为$\mathscr{R}=1$ 对应于 $|Z|\to\infty$，所以比声阻抗为无限大的极限情形就相当于一刚性界面。另一极限情形 $Z\to 0$ 给出$\mathscr{R}=-1$，而要求不论一$\hat{v}_z$的使如何在 $z=0$ 上 $\hat{p}$ 均应为 0，在这一极限情形下，界面就称作是一"压力释放界面"(可回忆第 2 章第 3 节中的讨论)。

3.6.3 局部反应表面

在第 2 章第 3.1 节中已提到过，除开上述两种理想的极限情形（$Z\to\infty$的刚性界面和 $Z\to 0$ 的压力释放界面）以外，压力振幅反射系数$\mathscr{R}$ 都要随入射角而变。但在某引些情形下，比声阻抗 Z 却非常接近于与入射角无关。这些情况包括，例如，某些厚的和薄的典型多孔材料表面、带空气垫的典型多孔材料表面(带或不带不可穿透坚硬覆层的、有或没有间隔支撑的)等。其前提应为：如$Z(\omega)$在给定的 θ_i 和实际的$\mathscr{R}(\theta_i,\omega)$下由(3.52)式算出，则其结果对固定的频率应非常接近于与 θ_i 无关，$\theta_i=0$ 时$\mathscr{R}(0,\omega)$所确定的 Z 值称为正入射界面阻抗。这样就可以从(3.52)式确定任意 θ_i 值下的$\mathscr{R}(\theta_i,\omega)$。一个结论是：如 Z 为有限的，则在 $\theta_i\to\pi/2$(掠入射)极限情形下 $\mathscr{R}(\theta_i,\omega)\to -1$，正如对一压力释放界面那样。

Z 与 θ_i 无关这一要求与以下假定一致：界面上一给定点处的 v_z 值仅仅依赖于同一点处的声压；也就是说，在界面上一点施加压力并不会使界面其他地方发生运

① 如 $X=\mathrm{Re}\hat{X}e^{-i\omega t}$，$Y=\mathrm{Re}\hat{Y}e^{-i\omega t}$，则 X 与 Y 乘积的时间平均值$(XY)_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\hat{X}\hat{Y}^{\dagger}$。

动。因此，我们可以设想一种局部反应表面，在它上面 $Z(\omega)$ 为固定的每一点处关系式 $\hat{p}=Z(-\hat{v}_z)$ 都成立，而不论在此界面以外声场是什么性质。这一模型不排除表面是弯曲的可能性，甚至允许 Z 沿表面逐点变化。

局部反应表面近似地计及了外界声压所造成的界面振动，同时也近似地计及了流体介质被界面以外的压力起伏推入或吸出界面中的小孔——这导致界面上法向粒子速度的变化。这一模型固然忽略了界面上一点处的压力对另一点处粒子速度可能有的影响，但对简化反射问题具有明显优点，因这时只需要一个边界条件来代替一般情况下的两个，而这一优点在讨论球面波的反射以及衍射问题时就更加明显了。

与局部反应表面相反的情况是：表面上一点的行为与邻近各点的行为有关，以致它对声波的反作用因入射波的不同而异。这种表面称为延伸反应表面。

3.6.4　反射表面上空的声场

在以上各段讨论的基础上就可以计算反射面上方的声场①。这里任一点处的声场均可看成由直达波和反射波组成(图 20)，而后者又可看成是从位于(0,0,$-z_0$)处的"虚源"发出的，在此我们略去反射线沿界面发生的切向位移②。我们的另一个假定是：在这里的球面波反射中，波振幅和相位的改变与以同一入射角入射的平面波中的一样。如以 R_1 和 R_2 分别表示从声源和虚源出发的距离，则沿入射和反射线的射线管面积分别与 R_1^2 和 R_2^2 成正比。对于并非完全反射的界面，唯一的修正就是将反射波每一频率成分的复振幅乘以 $\mathfrak{R}(\theta_i,\omega)$，根据(3.52)式，得

$$\mathfrak{R}(\theta_i,\omega)=\frac{Z(\theta_i,\omega)-\rho c/\cos\theta_i}{Z(\theta_i,\omega)+\rho c/\cos\theta_i} \tag{3.52'}$$

对于恒定频率的波，$f(t)=\mathrm{Re}\hat{f}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，根据以上讨论，复压力振幅 $\hat{p}$ 在几何声学近似下的解由下式给出

$$\hat{p}=\frac{\hat{f}}{R_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/c)R_1}+\frac{\hat{f}}{R_2}\mathfrak{R}(\theta_i,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/c)R_2} \tag{3.54}$$

当用上式估算一异常小的 $\hat{p}$ 值时，其正确性会有疑问，因为基于全波分析(对几何声学近似)所作的任何改正都可能成为总声压据幅一可观份额。这种情形的一个例子为当 $\mathfrak{R}(\theta,\omega)$ 接近于 -1 时界面 $z=0$ 附近(从而 $R_1\approx R_2$)的声场。例如，当 $\cos\theta_i\ll\rho c/|Z|$ 时从局部反应表面的反射就会出现这种情况。

---

① 很明显，在大气声学中只对上方声场有兴趣；而在某些场合(如水声学中)则会对下方声场有兴趣。

② 当狭窄的声束斜入射到一界面上时的确会发生这种切向位移；并且声束中能量按截面的分布也会改变，可参阅 A. Schoch. Acustica, 1952, 2: 18～22; M. A. Breazeale et al. J. Acoust. Soc. Am., 1974, 56: 866～872；或文献[35]。然而，对于一很宽的声束或是对于一球面波来说，这种反射时的位移效应就非常次要了。

如将 $\hat{f}$ 和 $\hat{p}$ 取作 $f(t)$和 $p(x,t)$的 Fourier 变换，则可得出对应的瞬时解。在应用 Fourier 积分定理之后，可求得

$$p=\frac{1}{R_1}f\left(t-\frac{R_1}{c}\right)+\frac{1}{R_2}g\left(t-\frac{R_2}{c},\theta_i\right) \tag{3.54'}$$

其中对应于反射波的波形 $g(t,\theta_i)$为$\mathfrak{R}(\theta_i,\omega)$与 $f(t)$的 Fourier 变换之乘积的 Fourier 逆变换。

3.7 地面的影响

现在进一步具体讨论地面的影响。这一问题从 20 世纪 70 年代中期开始受到广泛注意，而在 80 年代中期取得突破性进展，主要贡献表现在两个方面：一是对复阻抗界面附近点源声场的精确数学描述[84]；另一是空气声与地介质之间相互作用的"微观"描述[85]。基于这两项进展，对均匀的地球平表面上空声传播的物理过程有了深入的理解。

3.7.1 多孔半空间上空的声场表式

回到图 20，并假定界面下方为一多孔介质半空间。这时，换收点处的总声场可写作如下形式[86,87]：

$$\phi_{总}=\frac{e^{ik_1R_1}}{R_1}+\frac{e^{ik_1R_2}}{R_2}\{\mathfrak{R}(\theta_i)+B[1-\mathfrak{R}(\theta_i)]F(w)\} \tag{3.55}$$

其中，R_1 和 R_2 分别为声源 S 和虚源 S'到观察点 P 的距离，可看成是由直达波、反射波和一附加项组成，这一附加项是数学上要求与边界条件相匹配而产生的，它计及了波前曲率随距离的变化[88]：上式花括弧中的表式为一按球面波在一复阻抗平界面上反射面加以"修正"的反射系数，它由寻常的平面波反射系数$\mathfrak{R}(\theta_i)$((3.52)式或(3.52')式)加上依赖于 B 和 $F(w)$的一项组成：因子 B 主要计及从一复阻抗界面反射后的相位改变；而 $F(w)$系由使曲面的波前与平面的界面相匹配的需要面产生。w 这个量称为数值距离，利用它可将传播距离以阻抗来衡量。随着 w 的推进，波前变得越来越接近于平面，而 $F(w)$减小。

引进折射率 $n=k_2/k_1$ 和法化特性导纳 $\beta=mn=1/\zeta$ 可将(3.52')式改写为

$$\mathfrak{R}(\theta_i)=\frac{\cos\theta_i-m(n^2-\sin^2\theta_i)^{1/2}}{\cos\theta_i+m(n^2-\sin^2\theta_i)^{1/2}} \tag{3.52''}$$

对于更具普遍性的"延伸反应界面"，我们有[84]

$$B=\frac{[\cos\theta_i+\beta(1-\sin^2\theta_i/n^2)^{1/2}](1-n^{-2})^{1/2}}{[\cos\theta_i+\beta(1-n^{-2})^{1/2}/(1-m^2)^{1/2}](1-\sin^2\theta_i/n^2)^{1/2}}$$
$$\times\frac{[(1-m^2)^{1/2}+\beta(1-n^{-2})^{1/2}\cos\theta_i+\sin\theta_i(1-\beta^2)^{1/2}]^{1/2}}{(1-m^2)^{3/2}(2\sin\theta_i)^{1/2}(1-\beta^2)^{1/2}} \tag{3.56}$$

对于局部反应表面，在很好的近似下 $B\approx1$。而"球性"因子 $F(w)$ 可表示为

$$F(w) = 1 + \mathrm{i}\pi^{1/2} w \mathrm{e}^{-w^2} \mathrm{erfc}(-\mathrm{i}w) \tag{3.57}$$

其中 erfc 表示余误差函数[89]：

$$\mathrm{erfc}(\eta) = 1 - \mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_{\eta}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u$$

而数值距离 w 由下式确定

$$w^2 = \mathrm{i}k_1 R_2 \{1 + [\beta\cos\theta_i (1 - n^{-2})^{1/2} - \sin\theta_i (1 - \beta^2)^{1/2}]/(1 - m^2)^{1/2}\} \tag{3.58}$$

以上各式所有的平方根都应取得使它们的实部均不为负数。对于法化界面阻抗 $\zeta(=R+\mathrm{i}X)$ 的不同相角 $\phi=\arctan(X/R)$，函数 $F(w)$ 图示在图 21 上。

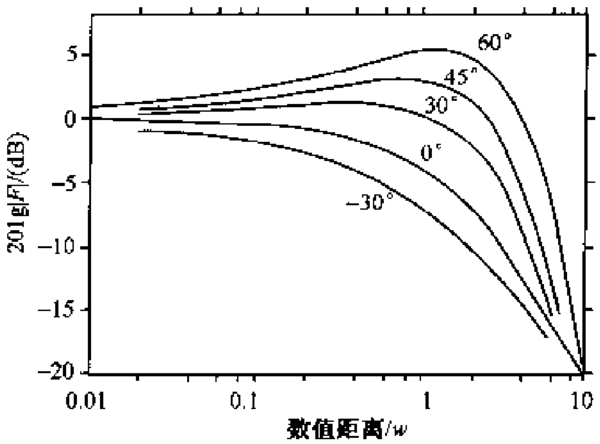


图 21　函数 $F(w)$ 在界面阻抗相角 ϕ 的不同值下的图示

3.7.2　地波和表面波

为了理解(3.55)式中第三项的物理意义，可考虑声波和接收器均位于地面上($\theta_i=90°$)这一特殊情况。这时由(3.52)式可见(3.55)式中之 $\mathscr{R}(\theta_i)=-1$。并且由于 $R_1=R_2$，该式前两项完全抵消而形成影区。透入影区的只有第三项。对于 $\phi=0$(纯阻界面)，第三项称为地波(此名称系类比于电磁波传播而来)。图 21 上对应于 $\phi=0$ 的曲线表明：在短距离范围内，地波并不经受超出球面扩展的"超额衰减"，可是对于较长的距离，距离每增加一倍，它就额外衰减 6dB。

在下一小节中将会看到，对于实际的地面，ϕ 在 30°至 60°之间变化，图 21 中相应的 F 与 $\phi=0$ 时的值相比，在 $w\geqslant1$ 时有很大的增长。这一增长来自在空气中传播的表面波的贡献，其振幅随着高出界面的高度而指数性衰减①。对于 $w<1$，表面波的贡献小于地波的贡献，因为距离每增加一倍，表面波振幅只减小 3dB。对于

① 具有这种衰减特性(衰减方向与传播方向相互垂直)的波统称为"不均匀波"。

$w>1$，则由于多孔界面小孔中的黏性损耗，表面波的振幅又再次小于地波的。

作为例子，在表 II 中对刈过草的田野列出按相应阻抗计算出的地波和表面波的“传播距离”d_w（对于 $w=1$）和“存在高度”z_{sw}（表面波振幅减小到其在界面上值的 $1/e$ 时的高度）。面在图 22 上给出各种波的相对贡献：“超额衰减”是相对于一理想刚性界面上方一点源的衰减而言的。

表 II 按刈草地面阻抗计算出的传播距离和存在高度

f/Hz	d_w/m	z_{sw}/m
50	4000	58
100	1500	23
200	270	7.3
500	24	0.9
1000	3.6	0.5
2000	1	0.15

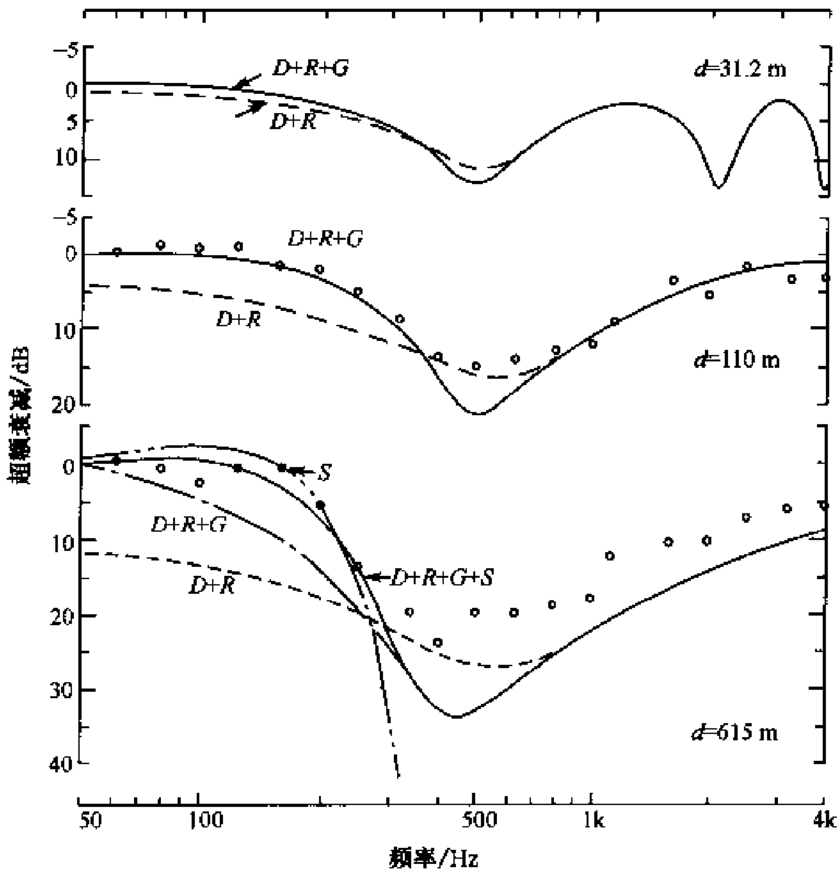


图 22 刈草地面上方点源传播情形下的超额衰减

声源高度 $z_0=1.8$m，接收器高度 $z=1.5$m。理论计算曲线表明来自各种波的贡献：直达波 D、反射波 R、地波 G、表面波 S；小圆圈表示可供比较的距离上以喷气声源所得测量结果[89]

3.7.3　计算地面阻抗的四参量半经验公式

w，ϕ 和 $\mathscr{R}(\theta_i)$ 的值依赖于地面的法化复特性阻抗。关于计算地面阻抗的半经验公式有多种模型，其中最完善的当推所谓“四参量模型”[90]，即用流阻、孔隙率、颗粒形状因子和孔隙形状因子比这样四个参量来描述地面结构。对于常见的地面结构，其法化复特性阻抗可近似表示为

$$\zeta \approx \left(\frac{4q^2}{3\Omega} + \frac{\mathrm{i}S_p^2\sigma}{\omega\rho_0}\right) \Big/ k_b \tag{3.59}$$

其中 Ω 为孔隙率①，$q^2 = \Omega^{-S_g}$（S_g 为颗粒形状因子，它将“扭曲度”q 与 Ω 联系起来）。S_p 为孔隙形状因子比，σ 为流阻（即迫使空气一单位流量通过地面介质所需的压力降，单位为 $\mathrm{kgs^{-1}m^{-3}}$）；ω 为声波角频率（$\mathrm{s^{-1}}$），ρ_0 为空气密度（$\mathrm{kgm^{-3}}$），而 k_b 为所谓法化波数（$\mathrm{m^{-1}}$），它可被算出：

$$k_b \approx (\gamma\Omega)^{1/2}\left[\left(\frac{4}{3} - \frac{\gamma-1}{\gamma}N_{\mathrm{pr}}\right)\frac{q^2}{\Omega} + \frac{\mathrm{i}S_p^2\sigma}{\omega\rho_0}\right]^{1/2} \tag{3.60}$$

其中 γ 为比热容比（$C_p/C_v \approx 1.4$）而 N_{pr} 为 Prandtl 数（$\mu C_p/\kappa \approx 0.72$）。

另外几个变量 S_p、Ω 和 S_g 等则可以各自独立地调整修正，直到对各种界面的理论预期值与实际测量值达到吻合为止。这样反复比较的结果，总是取 S_g 等于 0.75 而 S_p 等于 0.875。至于 Ω 和 σ，各种不同界面下的“推荐值”列于表 III 中。

表 III　四参量地面模型所要求的参量数值（S_g 总是取 0.750，S_p 总是取 0.875）

地面情况描述	Ω	σ/cgs
在 0.4m 厚的旧雪上新降 0.1m 厚的新雪	0.850	23
糖粒状雪	0.825	48
松树林或杉木林中	0.825	60
草地：蓬乱的牧场、机场、公共建筑等	0.675	330
路边松土、难以确定的小石块（由 0.1m 网孔筛选出）	0.575	960
被车辆压实的沙质淤泥	0.475	3470
“纯净”的石灰石片厚层（由 0.01～0.025m）网孔筛选出）	0.425	6470
间隙填以碎石（由 0.05m 网孔筛选出）的旧土路	0.400	7500
裸露并被雨水填实的土地	0.350	17100
被压得很紧实的采石粉尘	0.300	41700
被尘封并很少使用的沥青路面	0.250	120000

在中等频率至高频范围内，可取下列半经验公式[91,92]：

① 假设地面下介质中的小孔都以一种无规而各向同性的方式相互沟通，以使空气在任一方向上都同样容易地渗透，因而不被固体占有的那部分体积就能完全被空气占有，这一体积份额即为孔隙率 Ω。

$$\zeta = (R + iX)/[1 - (k/k_a)]^{1/2} \tag{3.61}$$

其中

$$\begin{aligned} R &= [1 + 9.08(f/\sigma_e)^{0.75}] \\ X &= 11.9(f/\sigma_e)^{-0.73} \\ k_a &= (\omega/c_0)[1 + 10.8(f/\sigma_e)^{-0.70} - i10.3(f/\sigma_e)^{-0.59}] \end{aligned} \tag{3.62}$$

这些表达式给出与实验值相当符合的预期值。在这些式子中，频率 f 单位为 Hz 而"等效流阻"$\sigma_e \approx S_p^2\sigma/\Omega$ 单位为 cgs Rayl，对于很大的 σ_e，四参量模型简化为

$$\zeta \approx 0.218(1 + i)(\sigma_e/f)^{1/2} \tag{3.63}$$

某些地面具有分层结构，这是由于在土基上物质的逐渐沉降而形成的。对于覆盖在阻抗为 ζ_2 的半无限层上的阻抗为 ζ_1、深度为 d 的层，其有效阻抗 $\zeta(d)$ 由下式给出

$$\zeta(d) = \frac{\zeta_2 - i\zeta_1 \tan(k_b d)}{\zeta_1 - i\zeta_2 \tan(k_b d)}\zeta_1 \tag{3.64}$$

其中 k_b 为上层中的法化波数("容积"传播常数)；k_b、ζ_1 和 ζ_2 等量可由(3.60)式和(3.61)式或(3.63)式算出。

3.7.4 地面引起的超额衰减

由上述可见，地面的影响最终表现为在其上传播着的声波的超额衰减。

在图 23 上就比阻抗为 9.34～8.75、声源高度为 15m、接收器高度为 0.55m、频率范围为 500Hz 这一情况绘出了计算所得曲线。超额衰减是相对于自由场所应具有的衰减而给出的(大于 0 的超额衰减意味着较低的声级)。

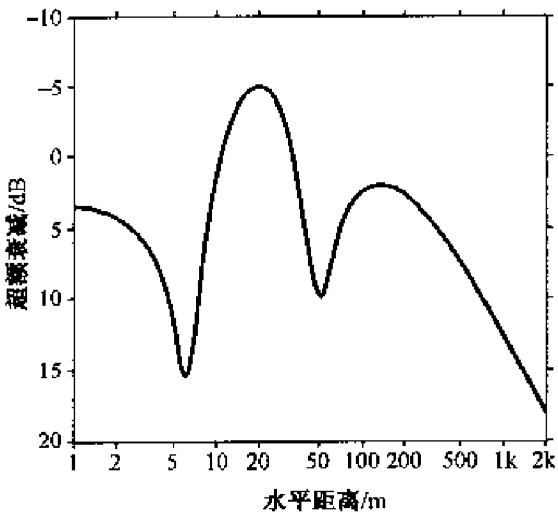


图 23 地面所引起的超额衰减

从图上看出，有若干"下沉"：第一个是所谓的地面效应下沉，是由直达声与反射声之间的干涉引起的；在频率高过这一下沉时，相长干涉导致声级的提高；接下去又是另一个干涉极小值。在很大距离处，直达声路径与反射声路径近于相等，从而导致一界面造成的影区，关于影区内声场的讨论在下一章中讨论。

3.7.5 地貌的影响

一般在讨论地面附近声场时都不言而喻地假定地面是平的，但在许多实际情

况中,小山、树木、建筑等往往会在某种程度上改变接收点处声场的振幅。下面简单谈一下两种较典型的情况。

(a)半无限障板①

对于一半无限的刚性薄板后的声场,在不存在地面的情况下可用 Fresnel 积分方程来估算[93]。在这种简单处理中,障板的上沿就作为一线源向障板后方衍射声能,但实际上问题要复杂而困难得多。

考虑一无限长障板[94],板两侧的地面情况各不相同,一系列声传播路径示于图 24 中最左一列。图中 S、R 分别为声源和接收器,T、X 则分别为它们在地面下方的"像";第二列示出用来计算衍射场 Ψ(对反射和可能存在的地波作出修正)的等效路径;第三列则列出声场各相应分量(见以下之方程(3.65))的计算公式。图中第Ⅰ行是无障板情形,由此计算出描述插入障板后声场损失所必需的声场Φ_g。

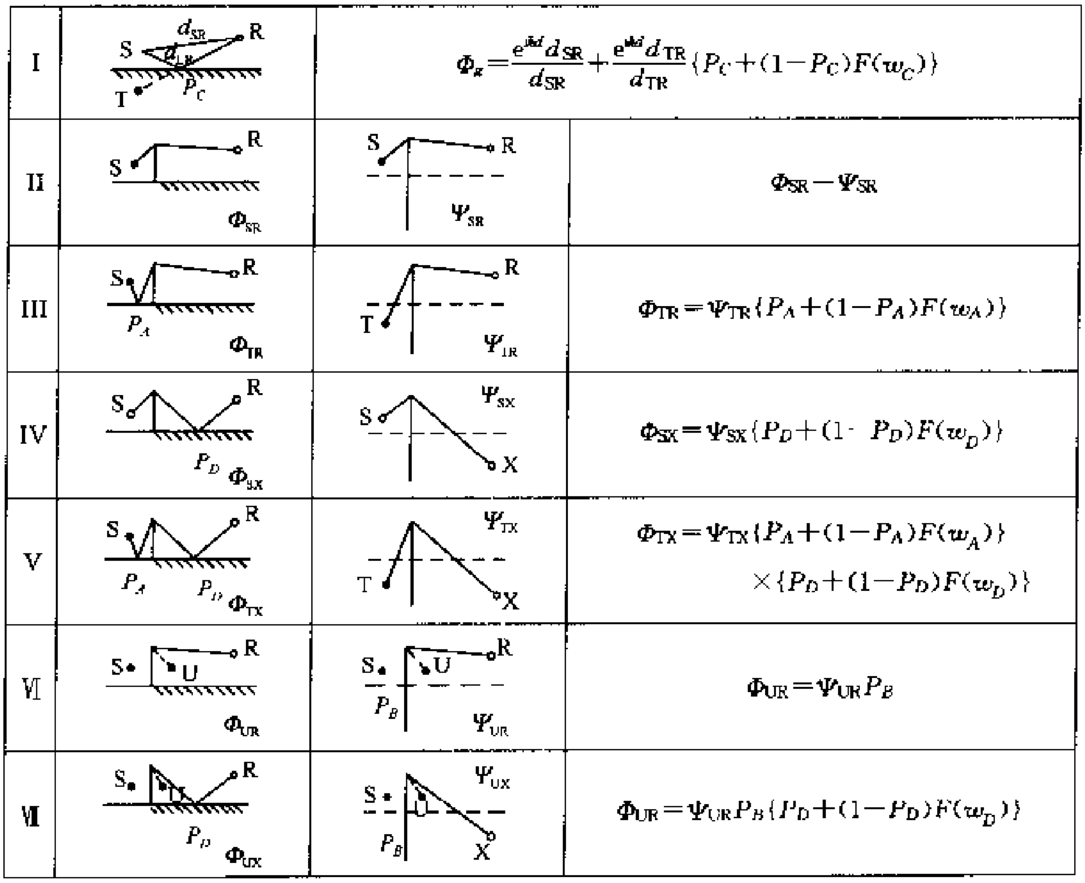


图 24　声源(S)和接收器(R)分置于障板各一方时
各种可能的声传播路径(构成总声场的各成分)

① 其实用价值为建于高速公路一侧(或两侧)的"声障"。这在日、美等国已日益常见。

Φ_g 以及 Φ 各分量的计算公式脱胎于(3.55)式，其中 P 为反射系数(下标 C、A 和 D 分别对应于：无障板情形、障板声源一侧和障板接收器一侧地面的反射系数，而 P_B 为障板面向声源一面的反射系数)、w 为相应情况的数值距离。于是，接收器 R 处的总声场由所有这些贡献叠加而成：

$$\Phi = \Phi_{SR} + \Phi_{TR} + \Phi_{SX} + \Phi_{TX} \qquad (3.65)$$

其中 Φ_{SR} 为声源 S 在 R 处的直接衍射场，Φ_{TR} 为虚源 T 在 R 处的衍射场，Φ_{SX} 为声源 S 在虚接收器 X 处的衍射场，Φ_{TX} 为虚源 T 在虚接收器 X 处的衍射场。更严格地说，还不应漏掉障板造成的虚源 U(即 S 由障板造成的像)的贡献。因此(3.65)式右端还应加进两项：$\Phi_{UR} + \Phi_{UX}$，它们分别为虚源 U 在 R 和 X 处的衍射场；再进一步，如果 R 能为 S 或 T 直接“照亮”(即 R 与 S 或 T 之间可直接以一直线相连，而不是像以上讨论的那样是以两段折线相连)，那么在总场中还应加进 S 和 T 每一个的几何扩展所造成的声场。

对上述每一项作出估算后，即得到如图 25 中所示的“衰减谱”。从图中可见，如所预期，障板在低频时只能提供很小的屏蔽作用。

天然屏障如小山等可用一楔形障板或一带平顶的楔形(宽障)来模拟。可以再次观察到最大的“插入损失”出现在高频。在实际应用中，图 25 中所示的 5kHz 附近的“插入损失”是很难达到的，因为折射声和散射声常常“填入”干涉造成的“下陷”中而使衰减减小。图 26 示出一种典型结果[96]：在高速公路柏油路面外侧竖起 2.44m 高的障板，在板另一侧高出地面 1m 处置接收器，可注意在衍射理论预言有最大“插入损失”的高频处，实验测量值高出理论预言值很多，这就说明散射降低了障板的屏蔽作用。

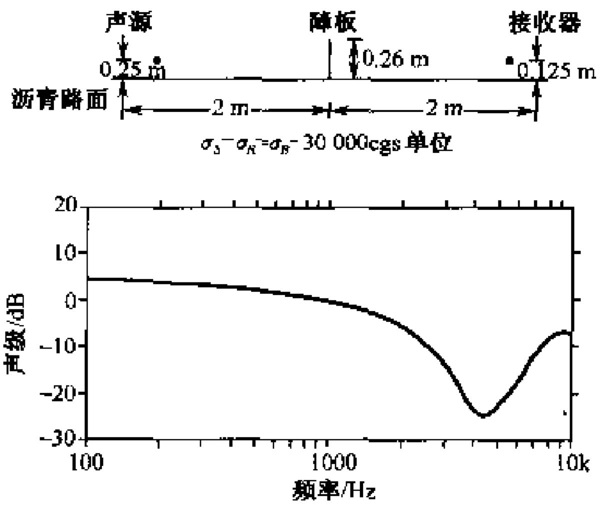


图 25 对如图上部所示的声源、接收器、障板和坚硬地面的对称结构，衍射理论所预言的衰减谱

(b)树木

利用植物(树木、灌木等)来降低噪声常可合乎需要[96]。对于 800Hz 以下的低频，沿传播路径生长的植物是一由沉积有机物形成的改良表面阻抗。在这一范围内表面流阻通常降低至 100cgs Rayl 以下，再者，有机层需要采用表面阻抗的二层模型。在高频时，由密集生长的树木可以产生很强的散射。然而，即使在高频下，树木所产生的“插入损失”通常很小，图 27 给出对一茂密的针叶树林得到的结果：

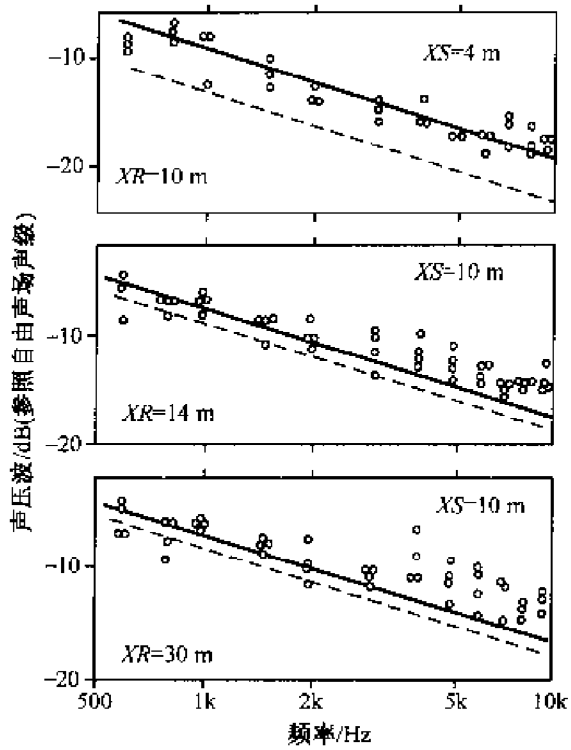


图 26　障板"插入损失"的理论值(虚线)与实测值的比较

XS 和 *XR* 分别为声源(高速公路噪声)和接收器到障板的水平距离

同时列出实测和理论计算值，理论是将树林模拟为两组各自等同的、铅直的、无限长的散射圆柱，并允许多次散射。采用两组布置试图表现散射既由树干产生又由树叶产生。

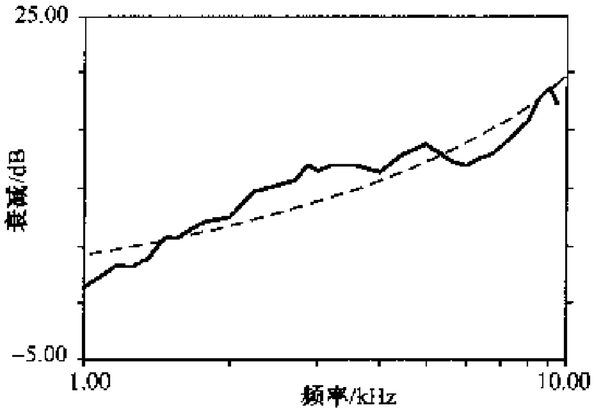


图 27　在针叶树林中测得的平均衰减(dB/24m)

虚线为按以下两组散射圆柱阵之和这一模型理论计算结果：

(a)刚性、半径 0.066m、密度 0.0724m $^{-2}$；

(b)非刚性、半径 0.001m、密度 100m $^{-2}$；表面流阻 $\sigma=860g^{-1}cm^{-3}$

第 4 章　声波在大气中的散射和衍射

在第 1 章第 2.2 节和第 2.3 节中已提到大气不均匀性中居第二位的无规不均匀性，主要指大气成分的不均匀性(如含有雨滴、雪片、雾粒、尘埃等等)和大气运动的不均匀性(大气湍流)两大类；无论哪一类不均匀性都会使声波产生散射。但显而易见的是，湍流产生的散射是更为经常发生从而是更为重要的。

湍流的发生与地面这一客观存在紧密相关，而湍流也正是存在于地面附近的热-黏性边界层中，由于其中的不稳定性而形成大的涡旋，进一步的不稳定性使这些涡旋逐渐破裂为尺度较小的涡旋，直至能量耗散于黏性而最终形成非常小的涡旋，因此大气中一直存在涡流的统计分布。湍流强度依赖于气象条件，一般在夏季的下午最强，而在夜间逆温情形下较弱。

湍流的具体来源有两种：一是由于地面受太阳辐射的变化被加热和冷却，从而引起热卷流，这种湍流称为"热力驱动"湍流；二是由于地面造成风梯度，从而导致切变和湍流涡旋的形成，这种湍流称为"风力驱动"湍流；大多数情况下都是后一种湍流占优势。

在理论上考虑起伏(而非稳定)介质中的声传播时，必须计及介质本身的性质如湍流的能量谱(如图 3 所示那样)和相干长度等。声波的振幅和相位都是可以与介质的统计性质相关联的起伏量。湍流除了引起诸如散射这样的"新"现象外，还可与依赖于相干性的其他现象(诸如干涉)产生相互作用，例如，它可使干涉极小值的锐度和深度降低，甚至使它们完全消除。

大气湍流的效应理所当然地随着传播距离的增加而增长，并且一般说来随着频率的增加而增长。

4.1　散射的基本概念

当声波在其传播路径上遇到一障碍物或介质的不均匀性时，一部分波就会偏离其原来路径而在各个不同方向上产生次级波，这就是散射①。

许多散射现象中最显著的特征(除激发共振的情形以外)是高频波的散射比低频波的强得多，Tyndall 和 Rayleigh 正是根据这一点解释了天空颜色：天空发生的光为散射光；阳光中高频段的蓝色光比低频段的红色光散射得多，因而天空呈蓝

① 有时将传播方向被一粗糙表面"弄乱"的现象也称为"散射"，但其更恰当的名称似应为"漫反射"。

色。这种高频与低频的概念都是考虑其相应波长与散射体(障碍物或不均匀性)尺寸大小的相对关系而定的。当散射体大小比波长大得多时(常见于光学情形而少见于声学情形),散射波的一半从散射体沿所有方向或多或少均匀地散开(反射波);另一半集中于散射体后方,就像是与未受干扰的原始波发生相消干涉而产生一边缘明晰的影区(干涉波)。当散射体比波长小得多时(常见于声学情形),所有散射波向所有方向传播开去而不存在边缘明晰的影区。在散射体与波长同等大小的中间情形,则可以发生各种奇妙的干涉现象,不言而喻,我们只对后两种情形有兴趣。

4.1.1　固定刚性体的散射

Rayleigh(低频)散射的范例为一恒定频率的平面波投射到一不可移动的刚性物体上时产生的散射。令该物体的重心位于原点(见图 28),而平面波行进方向之单位矢为 $\boldsymbol{e}_k$(波矢 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_k$),空间中某点处的总声压可写为

$$\hat{p} = \hat{p}_i e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{p}_{sc}(\boldsymbol{x}) \tag{4.1}$$

其中,$\hat{p}_i$为入射波 p_i 的振幅而$\hat{p}_{sc}$为散射波的复振幅,后者应满足 Helmholtz 方程和 Sommerfeld 辐射条件,而对刚性表面的要求$\nabla\hat{p}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 给出:在物体表面 S 上(单位法向矢 $\boldsymbol{n}$ 从物体朝外指)

$$\nabla\hat{p}_{sc}\cdot\boldsymbol{n} = -i\hat{p}_i e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n} \tag{4.2}$$

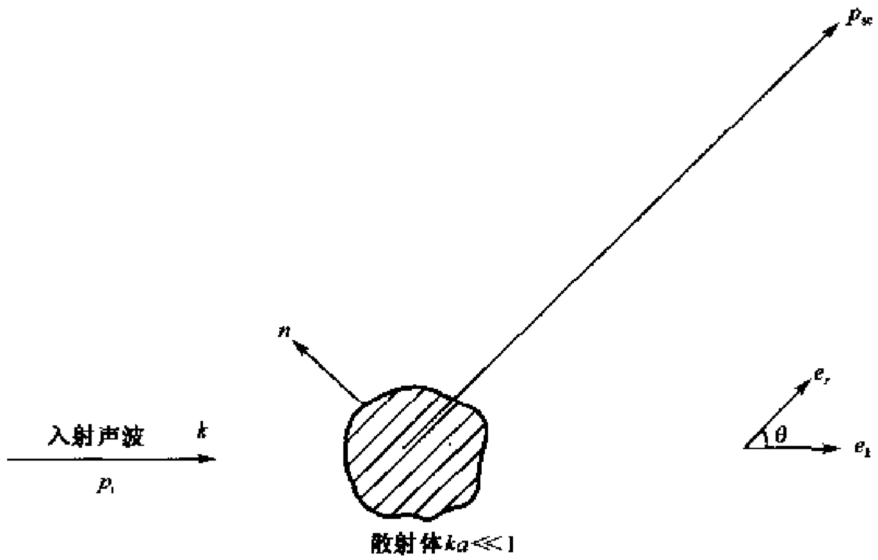


图 28　平面声波为一比波长小得多的不可移动刚性体所散射

上式中指数式的展开式,精确到 k 的一次方项为

$$\hat{v}_{sc}\cdot\boldsymbol{n} = -\frac{\hat{p}_i}{\rho c}\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{n} - i\frac{\hat{p}_i}{\rho c}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{n} \tag{4.3}$$

第一项对应于刚性物体以速度振幅$-\hat{p}_i/\rho c$平行于$\boldsymbol{e}_k$的前后移动，并独立地产生偶极子辐射；第二项则引起单极子辐射，虽然它比第一项小一个ka量级，但二者对远场的影响是同量级的，因为单极子辐射效率比偶极子高。

根据相关的辐射理论（参阅文献[30]，[60]）可分别算出单极子和偶极子的复振幅，从而得到由二者之和组成的散射波振幅：

$$\hat{p}_{sc}=-\frac{k^2\hat{p}_i}{4\pi}\left[V-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_k\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{4.4}$$

其中，V为散射体总体积；$\boldsymbol{e}_r$为R内之原点指向观察点矢径r方向的单位矢；$\boldsymbol{M}$为所谓磁极化张量[97]，其矩阵表达式依赖于散射体的几何形状，如对于一球体和一半径为a、盘面垂直于z轴的薄圆盘，$\boldsymbol{M}$分别为

$$\frac{3}{2}V\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\text{和}\frac{8}{3}a^3\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

这时从(4.4)式得到相应的散射波振幅

$$\hat{p}_{sc,\text{球}}=-\frac{k^2\hat{p}_i}{4\pi}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)\left[1-\frac{3}{2}\cos\theta\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{4.4a}$$

$$\hat{p}_{sc,\text{盘}}=\frac{k^2\hat{p}_i}{4\pi}\frac{8a^3}{3}\cos\theta\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{4.4b}$$

其中$\cos\theta=\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_r$从而$\theta$就是散射方向与入射方向所成角度。在(4.4b)式中不存在单极子项是因为薄盘没有体积；从(4.4)式以及上面两式中均可看出：远场散射波振幅正比于k^2a^3/r。

4.1.2 散射截面

在很大距离r处散射波的时间平均强度I_{sc}等于$\frac{1}{2}|\hat{p}_{sc}|^2/\rho c$的渐近值，它正比于时间平均入射强度$I_i$、按$1/r^2$随$r$减小、并通常依赖于从散射体到测定散射声压处的方向。比值r^2I_{sc}/I_i表示每单位入射强度在每单位立体角内散射的功率，称之为微分截面$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$，而它遍及立体角的积分即为散射截面$\sigma$。从定义可知，散射截面也就是入射波因散射损失的功率在入射波强度（单位面积功率）中所占份额，它实际上就是被散射体“移开”的那部分入射波截面积。当散射方向向后指向声源时的散射截面称为后向散射截面，$\sigma_{\text{后}}=4\pi\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$；对于各向同性的散射体，$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$与方向无关并等于$\sigma/4\pi$，因此后向散射截面$\sigma_{\text{后}}$就等于散射截面$\sigma$。

与后向散射截面紧密相关的是所谓目标强度，其定义为

$$\mathrm{TS}=10\lg\frac{\sigma_{\text{后}}}{4\pi R_{ref}^2}(\mathrm{dB}) \tag{4.5}$$

其中参考长度R_{ref}在较早期文献中取为1码≈0.914m，而在当今文献中均取为

1m[98]。对数宗量中之比值亦可看成为后向散射方向上微分截面被除以 $1\mathrm{m}^2$/立体弧度的参考微分截面。如散射体上的入射声压级为 L_i，而离散射体距离 R_0 处的后向散射波声压级为 $L_{后}(R_0)$，那么目标强度的定义就意味着

$$\mathrm{TS} = L_{后}(R_0) + 10\lg\frac{R_0^2}{R_{\mathrm{ref}}^2} - L_i \tag{4.5'}$$

这里假定散射波像在球面扩展中那样随距离减弱。

由一不可移动刚性物体所产生低频散射的微分截面的表达式可从(4.4)式推出：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{k^4}{16\pi^2}\left|V - \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_k\right|^2 \tag{4.6}$$

而对于后向散射截面，令 $\boldsymbol{e}_r = -\boldsymbol{e}_k$ 并进一步乘以 4π，可得

$$\sigma_{后} = \frac{k^4}{4\pi}\left|V + \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_k\right|^2 \tag{4.7}$$

上二式所示的频率依赖关系($\sim f^4$)对散射截面 σ 也是正确的，所要求的 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ 对立体角的积分在将 z 轴选在 $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_k$ 的方向下变得较为简单(这时 $\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_k = |\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_k|\cos\theta$)。由于 $\cos\theta$ 在 $\theta=\pi/2$ 附近很小，交叉项的积分为 0，因此与单极子和偶极子相关联的散射声功率是可叠加的。这剩下两项的积分可给出简单表式，因为 $\cos^2\theta$ 在一球面上的平均为 1/3，并因对一点所得的总立体角为 4π；故最后总结果为

$$\sigma = \frac{k^4}{4\pi}\left[V^2 + \frac{1}{3}(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_k)^2\right] \tag{4.8}$$

4.2　从不均匀性上的散射

4.2.1　散射的微分方程

如散射体是介质声性质不同于其周围部分的一个区域 R，设这些不均匀性是由密度 ρ 和压缩率 κ 的不同而引起的，则可用下述两个参量来描述(参阅文献[33]中的第 8.1.5 节)：

$$\gamma_\rho = \begin{cases} 1 - \dfrac{\rho_0}{\rho_e}; \\ 0 \end{cases} \quad \gamma_\kappa = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 c_0^2}{\rho_e c_e^2} - 1, & 在 R 之内 \\ 0, & 在 R 之外 \end{cases} \tag{4.9}$$

其中下标 e 标示区域 R 之内的量，下标 0 表示区域 R 之外的量。只考虑恒定频率 ω 的声波，Helmholtz 方程(2.14)即可变换为

$$\nabla^2\hat{p} + k^2\hat{p} = -k^2\gamma_\kappa\hat{p} - \nabla\cdot(\gamma_\rho\nabla\hat{p}) \tag{4.10}$$

其中 $k=\omega/c_0$，右端两项分别与单极子散射和偶极子散射相关联。表征不均匀性范围大小的空间尺度 a 到处满足条件 $kac_0/c\gg 1$ 和 $(ka)^2\rho_0/\rho\gg 1$。像以前一样，入

射声压有复振幅$\hat{p}_i e^{ik\cdot x}$,所以$\hat{p}-\hat{p}_i e^{ik\cdot x}$满足 Sommerfeld 辐射条件。

4.2.2 散射的积分方程

正如辐射问题一样,在这里处理压力波的积分方程比处理微分方程加边界条件更为有效;而积分方程可用 Green 函数方法(参阅文献[33]中第 7.1.7 节)得到,将(4.10)式右端视为源函数 f,首先得出将$\hat{p}$表为 fG 的体积分加上关于$\hat{p}$和$G(x|x_s)$的面积分的表达式,对于无界介质情形,Green 函数 $g=e^{ikr'}/4\pi r'$;遍及无限远处球面上的面积分给出来自无限远并被区域 R 所散射的人射波 p_i。因此,当人射波 p_i 被密度和压缩率与周围介质不同的单个区域 R 散射时,相应于(4.10)式的积分方程为

$$\begin{aligned}\hat{p}(x)&=\hat{p}_i e^{ik\cdot x}+\iiint_R\{k^2\gamma_\kappa(x_s)\hat{p}(x_s)+\nabla\cdot[\gamma_\rho(x_s)\nabla_s\hat{p}(x_s)]\}g(x|x_s)dV_s\\&=\hat{p}_i e^{ik\cdot x}+\iiint_R(k^2\gamma_\kappa\hat{p}g+\gamma_\rho\nabla_s\hat{p}\cdot\nabla_s g)dV_s\end{aligned}\tag{4.11}$$

其中

$$g(x|x_s)=\frac{1}{4\pi|x-x_s|}\exp(ik|x-x_s|)$$

下标 s 标示对应于声源的量,因而 x_s 表示声源位置(x 表示观察点(场点)位置),∇_s 表示对声源坐标的梯度。第一项来源于 R 中压缩率 κ 与周围介质不同的那部分不均匀性,结果产生一源密度为$(ik/\rho c)\gamma_\kappa(x)\hat{p}(x)$的单极子分布;第二项引起从每一 dV_s 上散射的偶极子子波,由于密度不同,区域 R 并不响应于力$\nabla\hat{p}$以与周围介质一样的速度运动,这就产生一偶极子源密度$(1/ik\rho c)\gamma_\rho(x)\nabla\hat{p}(x)$。值得注意的是,这两个源都只依赖于 R 内的真实声压场$\hat{p}$而不依赖于人射声压$\hat{p}_i$。

4.2.3 散射波的渐近表近

通常散射波必须在离散射体相当远的地方来测量,为的是将散射波与人射波分开。因此求出离散射区域 R 很远地方($x\gg a$,这里 a 为包围 R 的球的半径)散射波的渐近表式就特别有意义,这时 Green 函数具有简单形式

$$g(x|x_s)\to\frac{1}{4\pi r}\exp(ikr-ik\cdot x_s)\tag{4.12}$$

其中 $k_s=ke_r$。由(4.11)式即可得出散射波的渐近表式

$$\begin{aligned}&\hat{p}_{sc}\to\hat{p}_i\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\Phi_s(k_s)\\&\Phi_s(k_s)=\frac{k^2}{4\pi\hat{p}_i}\iiint_R[\gamma_\kappa(x_s)\hat{p}(x_s)-i\gamma_\rho(x_s)e_r\cdot\nabla_s\hat{p}(x_s)]e^{-ik_s\cdot x_s}dV\end{aligned}\tag{4.13}$$

因此，如已知 R 内声场 $\hat{p}(\boldsymbol{x}_s)$ 的精确形式，就可按上式计算出远场散射波的精确形式，其振幅依赖于指向观察点方向的波矢 $\boldsymbol{k}_s$。

函数 $\Phi_s(\boldsymbol{k}_s)$ 称为散射波的角分布因子或散射振幅，因而 $r \gg a$ 处散射波的强度就是 $|\Phi_s|^2/\rho c r^2$。重要的是：Φ_s 是函数

$$\varphi_s(\boldsymbol{x}) = \frac{2\pi^2 k^2}{\hat{p}_i}[\gamma_\kappa(\boldsymbol{x})\,\hat{p}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{i}\gamma_\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_r \cdot \nabla \hat{p}(\boldsymbol{x})] = \iiint \Phi_s(\boldsymbol{K})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}V_K$$

$$\Phi_s(\boldsymbol{K}) = \frac{1}{8\pi^3}\iiint \varphi_s(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}V_x \tag{4.14}$$

$$\mathrm{d}V_K = \mathrm{d}K_x\mathrm{d}K_y\mathrm{d}K_z,\ \mathrm{d}V_x = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对于特殊值 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{k}_s$ 的三维 Fourier 变换。散射振幅的这一性质在分析散射波时非常有用。

4.2.4　Born 近似

上面已经看到：在散射区域 R 内，一旦压力分布的精确形式确定后，R 以外的所有声场性质，包括散射波的渐近行为都可以计算出来，这实际就是 Born 近似①得以成立的假定：为散射区 R 所散射的波与被其他部分所散射的波无关。在某些形状相对简单（如球、圆柱、圆盘、椭球等）散射体的情形下，积分方程(4.11)可以精确解出，从而得到声散射的精确公式；在另一些较复杂情形下，可用变分法或逐步逼近法近似地解出，现在就较详细地讨论后一种近似法。

在(4.11)式的积分中，用已知函数 $\hat{p}_i$（入射波）取代未知的 $\hat{p}$，而将这时所产生的场取作一级近似：

$$p(\boldsymbol{x}) \approx p_i(\boldsymbol{x}) + p_1(\boldsymbol{x}),$$

$$p_1(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_R [k^2\gamma_\kappa(\boldsymbol{x}_s)p_i(\boldsymbol{x}_s)g(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_s) + \gamma_\rho(\boldsymbol{x}_s)\nabla_s p_i(\boldsymbol{x}_s)\cdot\nabla_s g(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_s)]\mathrm{d}V \tag{4.15}$$

当 $p_1(\boldsymbol{x})$ 在整个 R 中都比 $p_i(\boldsymbol{x})$ 小很多的情形下，上式给出散射波行为令人满意的表达式。如这一条件不成立，则在近似级数中要加进高阶项：

$$p(\boldsymbol{x}) = p_i(\boldsymbol{x}) + p_1(\boldsymbol{x}) + p_2(\boldsymbol{x}) + p_3(\boldsymbol{x}) + \cdots$$

$$p_{n+1}(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_R [k^2\gamma_\kappa(\boldsymbol{x}_s)p_n(\boldsymbol{x}_s)g(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_s) + \gamma_\rho(\boldsymbol{x}_s)\nabla_s p_n(\boldsymbol{x}_s)\cdot\nabla_s g(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_s)]\mathrm{d}V_s \tag{4.16}$$

虽然上述级数总是收敛的，但通常收敛得很慢，除非 γ_κ 和 γ_ρ 都相当小（即 ρ_e 与 ρ_0、c_e 与 c_0 都相当接近），而这时 p_1 就足够了。当 Born 近似不适用时可用变分法，当

① 该近似法源于量子力学中类似的散射问题。参见 M. Born. Quantum Mechanics of Collision Processes. Z. Phys.，1926，38，803～827；J. Mathews and R. L. Walker. Mathematical Methods of Physics. New York：Benjamin. 1965：289。

然，在可能情况下用精确解。

当两个 γ 都很小而 Born 近似有效时，散射波的计算很简单，如入射波为平面波 $p_i(\boldsymbol{x})=\hat{p}_i e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$，角分布函数近似等于

$$\begin{aligned}\Phi_b(\boldsymbol{\mu}) &= \frac{k^2}{4\pi}\iiint_R[\gamma_\kappa(\boldsymbol{x}_s)+\gamma_\rho(\boldsymbol{x}_s)\cos\theta]e^{i\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{x}_s}\mathrm{d}V_s \\ &= 2\pi^2k^2[\Gamma_\kappa(\boldsymbol{\mu})+\Gamma_\rho(\boldsymbol{\mu})\cos\theta]\end{aligned} \tag{4.17}$$

其中 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{k}_s-\boldsymbol{k}_i$，$\cos\theta=\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{k}_s/k^2$ 为 $\boldsymbol{k}_s$ 与 $\boldsymbol{k}_i$ 间夹角（即入射平面波方向与指向观察点的矢径 $\boldsymbol{x}$ 之间的散射角）的余弦，而各 Γ 为各 γ 的空间 Fourier 变换。

如 R 为一半径为 a 的球，而两个 γ 只与矢径 $\boldsymbol{x}_s$ 有关，就可算出对 $\mathrm{d}V_s$ 的角坐标积分，因而

$$\begin{aligned}\Phi_b(\mu) &= \frac{k^2}{\mu}\int_0^a[\gamma_\kappa(\boldsymbol{x}_s)+\gamma_\rho(\boldsymbol{x}_s)\cos\theta]\sin(\mu\boldsymbol{x}_s)\boldsymbol{x}_s\mathrm{d}\boldsymbol{x}_s \\ &\to \frac{1}{3}k^2a^3\left(\left\langle\frac{\rho_0c_0^2}{\rho_ec_e^2}-1\right\rangle+\left\langle1-\frac{\rho_0}{\rho_e}\right\rangle\cos\theta\right),\quad \mu a\ll1\end{aligned} \tag{4.18}$$

这里 $\mu=|\boldsymbol{k}_s-\boldsymbol{k}_i|=2k\sin(\theta/2)$。因此，在长波极限下，正比于 R 中平均值 $\langle\gamma_\rho\rangle$ 的偶极子波对 ka 的依赖关系与正比于 R 中平均值 $\langle\gamma_\kappa\rangle$ 的单极子波的同数量级。

4.3 大气湍流与声波的相互作用

大气本身运动的不均匀性（或湍流）和声波是流体运动的两种不同形式，前者是一种无规的速度场而后者是一种有序的波动。当大气中同时存在这两种运动形式时，会产生复杂的相互作用。对这种相互作用的描述依赖于两个近似：首先，声波中的密度变化表现为一可逆的绝热过程，即每个空气粒子（并非分子）或气团的熵在时间上保持常值，只要声波频率不是高到接近分子碰撞频率或低到“辐射吸收”开始起作用的次声频，这一绝热条件是可以成立的；其次，湍流表现为一不可压缩的无规流，即每一粒子的密度保持常值，在典型的大气条件下湍流的行为近似地同不可压缩流体一样。但由于湍流本身会产生无规的空气动力噪声，所以这一近似成立的前提是：或者忽略某一最低噪声级或者限制所考虑湍流的强度。

4.3.1 声波与湍流的分离

对相互作用作出定量描述是个繁杂的过程，为此首先必须将上述两个近似纳入运动方程，亦即必须找到一种明确途径来将粒子速度分解为与湍流相关联的部分 w 和与声波相关联的部分 u。例如，可将流体在相继时刻各点上的动力学和热力学状态“冻结”[99,100]，然后在每点就可将暂时附加压力或体力（它们使大气粒子

或气团绝热压缩或膨胀)施加到当声波和湍流都不存在时应具有的密度$\rho_0(\boldsymbol{X})$上。在这里,我们用"实体"坐标 $\boldsymbol{X}$ 来标记每个大气粒子,以区别于空间点的几何坐标 $\boldsymbol{x}$。

对于每一时刻 t,我们将每一绝热过程后的粒子速度表为 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{X})$并要求它保持不变,即 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X})$。由于在绝热过程中粒子必须来回移动使密度 ρ 能得到所期望的调整,所以必须有 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$;即,我们几乎已定义了一个与不可压缩湍流相关联的新的速度场 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$。但这一步骤并不是唯一的,为了排除这种不确定性,在此引进第三个假定。虽然 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X})$,但绝热过程中的粒子位移要求 $\nabla\boldsymbol{w}(\boldsymbol{X})=\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$。除了界面附近的声波和次声以外,与声波相关联的涡度均可忽略。另一方面,作为三维无规速度场,湍流必须具有异于0的涡度,这样就引进了第三个条件:$\nabla\times\boldsymbol{w}(\boldsymbol{X})=\nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X})$,这导致单值的湍流速度场和单值的声粒子速度场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$。顺便指出,上述步骤也要求$\partial_t\boldsymbol{w}(\boldsymbol{X},t)=\partial_t\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},t)$,但$\partial_t\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\neq\partial_t\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$。可是我们的步骤仍需有其有效范围:大气中不为0的平均密度梯度意味着:随着频率降至次声频段,粒子路径从直线逐渐变为椭圆,这又意味着涡度不为0。即使在可听声频段内,要是没有某种涡度,粒子速度切向分量在固体表面上应为0这一边界条件一般也不被满足。

4.3.2 湍流大气中的声波方程

根据上述处理法的三个条件,即声波是绝热的和无旋的而湍流是不可压缩的,可以导出湍流大气中的声波方程。为了不使结果过于繁杂,还要作一些线性化的假定。如 A 代表任一法化的声变量而 T 代表任一法化的湍流变量,那么所有量级为 A^2 或更高以及为 AT^2 或更高的项都将被忽略。4.3.1 节中所述声波量与湍流量的分离即意味着 T、T^2 等类型的湍流变量满足它们自己的方程而从声波方程中排除。可是平均风的 Mach 数 $m=\varpi/c_0$ 要求特殊处理,因为 m 的值可近似地达到0.1(在飓风和 chinook 风中还可超过此值),而湍流速度起伏 Mach 数的均方根值 $m'_{\rm rms}=\langle w'^2\rangle^{1/2}/c_0$ 却很少达到0.01。但平均风的大部分效应都可用"平均实质微商"来普遍加以考虑而对结果无任何限制。亦即,如将总速度写为 $V_i=v_i+\varpi_i$,而算符(1.29)表示寻常的实质微商,那么平均实质微商就是 $\bar{\rm d}_t=\partial_t+\varpi_i\partial_i$。这里出现的例外是一包含声扰动、量级为 $m'_{\rm rms}$的湍流扰动和平均风 Mach 数 m 的项,但因这一项仍然比其他项小得多而可以略去。

按照上述关于湍流速度与声速度的分离,我们写出 $v_i=w'_i+u_i$,这里 u_i 为声粒子速度。类似地将压力写为 $p=p_w+p_a$,下标 w 表明湍流为一无规速度(w)场而 a 表声场。但因 $p_w=\overline{p_w}+\overline{p'_w}=p_0+p'_w$并因 p'_w为 $w'_{\rm rms}$之二阶项,故可在含有声波量之任何项中令 $p_w\approx p_0$。由于湍流被假定为不可压缩的,故对于均匀情形下的湍流密度应类似地有 $\rho_w=\rho_0$。然而,如湍流将原来具有不同位温的气团混合起来,

则对于这样的大气湍流密度就不再是常数或是均匀的了。如将这样的气团标以符号 σ($\sigma=s/c_v$ 代表熵密度 s 与定容比热容 c_v 之比),即可将混合后的湍流密度写为 $\rho_\sigma=\rho_0+\rho_\sigma'$,这里 ρ_σ' 为一不为 0 的无规湍流变量。如在绝热条件 $\mathrm{d}_t\sigma=0$ 之外再假定 ρ_σ 为一"无源添加项",即每个气团的湍流密度在运动时不变(这也假定了气团的漂移没有大到足以让重力场产生明显变化),我们就得到一附加方程 $\mathrm{d}_t\rho_\sigma=0$。由于湍流运动的特征时间比与热流相关联的特征时间短得多,我们可假定不同密度 ρ_σ 的气团上的压力已达到湍流场中的压力值。因而,对于理想气体,关于时间或空间中的任一位移 d 可写出 $\mathrm{d}\ln\rho_\sigma=-\mathrm{d}\ln c^2$,这里 c 为与湍流场相关联的无规声速。

以上述符号和假定,连续性(质量守恒)方程、运动(动量守恒)方程、绝热条件以及 ρ_σ(或 c^2)为一无源添加项的限制就取如下形式(可比较第 1 章第 4 节中的讨论):

$$\bar{\mathrm{d}}_t\rho+\partial_j(\rho v_j)=0 \tag{4.19}$$

$$\bar{\mathrm{d}}_t(\rho v_i)+\partial_j(\rho v_i v_j)=-\partial_i p \tag{4.20}$$

$$\bar{\mathrm{d}}_t\sigma+v_j\partial_j\sigma=0 \tag{4.21}$$

$$\bar{\mathrm{d}}_t\rho_\sigma+v_j\partial_j\rho_\sigma=0 \tag{4.22}$$

在(4.20)式中利用乘积之微分律展开并以(4.19)式中的 $\bar{\mathrm{d}}_t\rho$ 代入,即得到以下形式之 Euler 方程

$$\bar{\mathrm{d}}_t v_i+v_j\partial_j v_i=-\rho^{-1}\partial_i p \tag{4.23}$$

另一方面,取(4.20)式的散度并以(4.19)式中的$\partial_j(\rho v_j)$代入,即得

$$\partial_i\partial_j(\rho v_i v_j)+\nabla^2 p-\bar{\mathrm{d}}_t^2\rho=0 \tag{4.24}$$

湍流场与声场之间的差异确定出速度 w_i' 和 u_i,但 ρ_σ 的确定则不同;即 ρ_σ 是由梯度大气中不同位置之间的绝热运动产生的,换句话说,ρ_σ 不仅对 w_i' 所代表的湍流运动而且对 u_i 所表示的声运动都是一无源添加项。因而,对于 ρ_σ 的一给定梯度,(4.22)式要求时间导数 $\bar{\mathrm{d}}_t\rho_\sigma$ 分裂为两部分:$(\bar{\mathrm{d}}_t\rho_\sigma)_w=-w_j'\partial_j\rho_\sigma$,代表由湍流引起 ρ_σ 的"平流"所造成的时间变化率;$(\bar{\mathrm{d}}_t\rho_\sigma)_a=-u_j\partial_j\rho_\sigma$,代表声波通过时的前后晃动所造成的变化率。结果,对应于(4.23)式和(4.24)式的纯湍流场方程化为

$$\bar{\mathrm{d}}_t w_i'+w_j'\partial_j w_i'=-\rho_\sigma^{-1}\partial_i p_w \tag{4.23$'$}$$

$$\partial_i\partial_j(\rho_\sigma w_i'w_j')+\nabla^2 p_w-\partial_i(w_i'w_j'\partial_j\rho_\sigma)+(\partial_i\rho_\sigma)\bar{\mathrm{d}}_t w_i'=0 \tag{4.24$'$}$$

由于晃动效应,以比值 $\xi=\rho_a/\rho_\sigma$ 为变量写出的声波方程要比单以 ρ_a 写出的简单得多,为此令 $\rho=\rho_0(1+\xi)$ 而将(4.24)式中的时间微商展开为

$$\bar{\mathrm{d}}_t^2\rho=(1+\xi)\bar{\mathrm{d}}_t^2\rho_\sigma+2\bar{\mathrm{d}}_t\rho_\sigma\bar{\mathrm{d}}_t\xi+\rho_\sigma\bar{\mathrm{d}}_t^2\xi \tag{4.25}$$

由(4.22)式我们有 $\bar{\mathrm{d}}_t^2\rho_\sigma=-\bar{\mathrm{d}}_t(u_i\partial_i\rho_\sigma)-\bar{\mathrm{d}}_t(w_i'\partial_i\rho_\sigma)$,再利用上文提到的关于 A^2 和 AT^2 的假定,(4.25)式中的第一项即化为

$$(1+\xi)\bar{\mathrm{d}}_t^2\rho_\sigma=-\bar{\mathrm{d}}_t(u_i\partial_i\rho_\sigma)-\bar{\mathrm{d}}_t(w_i'\partial_i\rho_\sigma) \tag{4.26}$$

由同一假定以及(4.22)式，$\bar{\mathrm{d}}_t\rho_\sigma=-u_i\partial_j\rho_\sigma-w'_j\partial_j\rho_\sigma$，(4.25)式右端的第二项化为 0。继续此进程，我们求得(4.26)右端的第一项化为 $-\mathrm{d}_t(u_i\partial_i\rho_\sigma)=-(\bar{\mathrm{d}}_t u_i)(\partial_i\rho_\sigma)$。而第二项化为纯粹由湍流变量组成：$-\bar{\mathrm{d}}_t(w'_i\partial_i\rho_\sigma)=-(\bar{\mathrm{d}}_t w'_i)\partial_i\rho_\sigma+w'_i\partial_i(w'_j\partial_j\rho_\sigma)$，将这些结果代入(4.24)式并用(4.23′)式和(4.24′)式减去所有的纯湍流量，再利用 A^2 和 AT^2 的假定，即得到

$$2\rho_0\partial_i\partial_j(w'_iu_j)+\nabla^2p_a+(\bar{\mathrm{d}}_tu_i)(\partial_i\rho_\sigma)-\rho_\sigma\bar{\mathrm{d}}_t^2\xi=0 \tag{4.27}$$

注意其中第三项已是 AT 型的项。因此就可利用所有 T 和 A^2 项都被去掉的 Euler 方程(4.23)来取代 $\bar{\mathrm{d}}_tu_i=-\rho_0^{-1}\partial_ip_a$，从量级的考虑可写出 $\rho_0^{-1}\partial_i\rho_\sigma=\partial_i\ln\rho_\sigma=-\partial_i\ln c^2$，由此(4.27)式中的第三项即成为 $(\partial_i\ln c^2)(\partial_ip_a)$。

现在引入绝热条件(4.21)，去掉取平均的上横杠它就成为 $\mathrm{d}_t\sigma=0$。由理想气体所满足的热力学关系 $T\mathrm{d}s=c_v\mathrm{d}T-(p/\rho^2)\mathrm{d}\rho$ 以及 σ 的定义($=s/c_v$)可写出 $\mathrm{d}_t\sigma=\mathrm{d}_t\ln(p/p_0)-\gamma\mathrm{d}_t\ln(\rho/\rho_0)$，再利用 $\rho=\rho_\sigma(1+\xi)$、$p=p_0+p_a$ 以及去掉平均横杠的(4.22)式，即 $\mathrm{d}_t\rho_\sigma=0$，即得 $\mathrm{d}_t\ln(1+p_a/p_0)=\gamma\mathrm{d}_t\ln(1+\xi)$，或在考虑 A^2 假定之后，$\mathrm{d}_t(p_a/p_0)=\gamma\mathrm{d}_t\xi$，因为总可假定在某一较早时刻(必要的话可设在 $t=-\infty$ 时)无声场存在，在原则上即将上述方程沿每一气团的路径积分而得到

$$p_a/p_0=\gamma\xi=\gamma\rho_a/\rho_\sigma \tag{4.28}$$

利用上述关系既可用 ξ 也可用 p_a 来写出声波方程。以(4.28)式中之 p_a 代入(4.27)式(其第三项已变为 $(\partial_i\ln c^2)(\partial_ip_a)$)，再利用关系 $c^2=\gamma p_0/\rho_\sigma$ 后即得

$$2\partial_i\partial_j(w'_iu_j)+\partial_i(c^2\partial_i\xi)-\bar{\mathrm{d}}_t^2\xi=0 \tag{4.29}$$

注意到其中第一项也是 AT 型的，故可再次应用所有 A^2 和 T 项被去掉的(4.23)式。由(4.28)式，可将(4.23)式的这一简化形式写作 $\bar{\mathrm{d}}_tu_i=-c_0^2\partial_i\xi$，但在利用这一方程之前，需要对所有的量应用 Fourier 时间变换 $\mathscr{F}_t$ 来转换时间微商，这意味着也需对(4.29)式作同样变换。如写出 $P=P(k)=\mathscr{F}_t\xi$(它与 $\mathscr{F}_tp_a$ 仅差一常数)，$U_i=\mathscr{F}_tu_i$，$N'=\mathscr{F}_tn'$(这里 $n'=n-1=(c/c_0)-1$)，$M'_i=\mathscr{F}_tw'_i/c_0$，$\bar{M}_i=\bar{m}_i\delta(k)$ 和 $c_0^{-1}\mathscr{F}_t\bar{\mathrm{d}}_t=-\mathrm{i}k+m_i\partial_i$，则(4.23)式的简化形式即成为

$$U_i/c_0=-\mathrm{i}k^{-1}\partial_iP-\mathrm{i}k^{-1}\bar{M}_j\partial_jU_i/c_0 \tag{4.30}$$

我们可以用迭代法继续将上式右端的 U_i 除去，但我们注意到：在右端第一项之后，代入(4.29)式第一项的 Fourier 变换中的结果应给出包含所有小因子 $\bar{M}$、M' 和 P 的项。如在本节第一段末尾所提到的，这些项仍然比其他项小一个量级从而可以略去。因为一般说来 w'_i、u_i、c^2 和 ξ 都是时间的函数，对(4.29)式应用 Fourier 变换将使与时间无关各函数的所有乘积转换为 k 卷积。我们用星号“ * ”表示的一维卷积定义为

$$\mathscr{F}_t\{f(t)g(t)\}=F(k)*G(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k'F(k-k')G(k')$$

$$\mathscr{F}_k^{\dagger}\{F(k)G(k)\} = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t-t') g(t') \qquad (4.31)$$

而用"⊙"表示的三维卷积定义为

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_x^{\dagger}\{f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\} &= F(\boldsymbol{\kappa})\odot G(\boldsymbol{\kappa}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{\kappa}' F(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}')G(\boldsymbol{\kappa}') \\ \mathscr{F}_\kappa^{\dagger}\{F(\boldsymbol{\kappa})G(\boldsymbol{\kappa})\} &= f(\boldsymbol{x})\odot g(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{x}' f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')g(\boldsymbol{x}') \end{aligned} \qquad (4.32)$$

此外,AT^2 假定意味着第二项中的 N^{-2}必须用 $1-2N'$来近似,在(4.29)式中引入上述所有变换并整理后即最后得到湍流大气中的声波方程:

$$\nabla^2 P + (k + \mathrm{i}M_j\partial_j)^2 P = 2\partial_j(N' * \partial_j P) + 2\mathrm{i}\partial_j\partial_h[M'_j * (k^{-1}\partial_h P)] \qquad (4.33)$$

由于该方程在以声散射为基础的大气声遥感术(参阅第 8 章)中占特殊重要地位,所以又以"声遥感方程"著称。

在所谓"冻结湍流"假定下,即假定平均风速为 0 并且湍流的变化率比声波频率低得多,那么(4.33)式简化为

$$\nabla^2 P + k^2 P = 2\partial_j(N'\partial_j P) + 2\mathrm{i}k^{-1}\partial_j\partial_h(M'_j\partial_h P) \qquad (4.33a)$$

如将湍流不存在时的声场记作 P_0,在上式右端,即包含折射率起伏 N'和速度起伏 M'_i的项中以 P_0 代替 P,那么初始波 P_0 波前法向单位矢 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_i$ 就是非无规的,因而可写出如下形式的"有效折射率起伏":

$$N'_e = N' - \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{M}' \qquad (4.34)$$

最后给出 Born 近似下的声波方程

$$\nabla^2 P_1 + k^2 P_1 = 2\partial_i(N'_e\partial_i P_0) \qquad (4.33a')$$

在其中已将声场分解为初始场和散射场:$P=P_0+P_1$,以尖括号表示总体平均,则 $P_1=\langle P_1\rangle+P'_1$,而 $\langle P'_1\rangle=0$。必须强调,仅在 Born 近似下才有 $\langle P_1\rangle=0$ 从而 $P_1=P'$。

4.3.3 湍流与声波的相互作用机制

"传播"和"散射"可以有多种不同涵义,例如,波在折射率光滑梯度方向上传播这一特殊的折射情形就可称为"相干前向散射"。但我们在这里采用较为严格的散射定义(其实更妥当的名称应是"简单散射"):设有一初始波 P_0,并选取一 P_0 为 0 的或有限时、空区域传播方向,如可发现在此区域内传播的声波 P_1,那么我们就称 P_1 为由 P_0 与散射体体积 V_s 相互作用而产生的"散射"波,而将 P_0 和 P_1 二者在同一区域内传播并相互作用这一复杂得多的过程简单地称为"传播"。由于散射将原来在一个方向的初始能流的一部分散布到许多个方向,所以散射波在一个散射角 θ_s 方向的强度总是比初始强度小得多,因而我们经常可以用 Born 近似或"单个散射"近似来处理散射,该近似假定:如一部分波一旦被湍流所散射,则在以后的大部分时间内此散射波将不再被散射而直接到达接收器;

这一近似并不意味着只存在一单个散射体或只有一单个相互作用中心。

(4.33)式的右端清楚地表明：声波与湍流相互作用的物理过程依赖于折射率的起伏 N'，而后者又依赖于温度起伏 T'、水汽压力起伏 e' 和湍流 Mach 矢的起伏 $M'=w'/c_0$。首先只考虑温度的起伏，对于均匀湍流，由于温度起伏 T' 正比于湍流压力起伏而后者是 M' 的二阶量，所以与温度起伏的相互作用可以忽略，然而，在大气中通常发生的情况是：平均位温梯度的存在导致一相当不同的结论。如湍流和位温梯度同时存在，湍流将使不同位温的空气粒子混合，因而，结果所产生的湍流混合物可以具有与法化速度起伏同数量级的法化温度起伏。注意这里所要求的是位温梯度而不是温度梯度，同样须注意：只要有很小的湍流就完全有可能具有位温梯度，反过来，在平均位温梯度很小时就可具有风切变引起的湍流。

当声波通过一无规折射率起伏区时，波前上各点系以不同的无规速度行进的，将 Huygens 原理应用到结果所产生的不规则波前上就表明：能流的一部分改向为不同于初始方向的许多无规的、向前的方向。然而当折射率梯度足够大时，也会产生后向传播或反射。对于一实际的平面不连续性 ΔN，经典的 Fresnel 公式给出一功率反射系数 $\Gamma^2=\Gamma_0^2=|\Delta N/2|^2$。对于光滑的折射率剖面，功率反射系数可由对剖面积分而得。例如，对于一厚度为 l 的剖面层，当厚度与波长之比 $l/\lambda<0.1$ 时，Γ^2 约为 Γ_0^2 的 70%，但当 $l/\lambda>0.5$ 时 Γ^2 一下子降为 Γ_0^2 的 1%。因此如湍流有足够大的无规折射率梯度，声波就将既在前向散射角内散射又在后向半球内散射。然而，声-湍流相互作用的一个特色是：无论从 N 的还是 M 的起伏上都不会在 $\theta_s=90°$ 上发生散射，这一特色起因于声波方程(4.33)中既出现 N' 和 M' 本身又出现它们的微商。

在本章开头讨论将湍流运动和声波运动分离时，所提出的空气不可压缩性质只在对大气的缓慢推动情形下成立，而对一快速推动，如一换能器或一爆炸温所产生的推动那样，那么就有声音产生。这一性质意味着：缓慢运动不能与快速运动耦合而只能"推移"它们。于是，湍流运动产生一无规湍流速度起伏矢量叠加到波的相速度上，当波深入到湍流中足够远以致在前向半球中具有无规的波矢时，波矢在垂直于初始传播方向的平面上的分量就可能与湍流速度起伏同等大小，结果造成在后向半球中也有散射。但会有一例外，这是由于速度总只是波速与湍流速度的矢量和，纯后向散射(或 $\theta_s=180°$)方向上的唯一分量就是原来的湍流速度起伏，这些起伏不构成平均振荡频率不为 0 的传播波，因此就不存在从速度起伏上后向散射的波，实际上只有折射率起伏能产生散射波。

由下述比较可以进一步洞察折射率起伏与速度起伏所引起散射之间的差别。如上所述，足够强的均匀折射率梯度像一面不完全的镜子，能产生后向散射波这样的不完全反射。假定我们可以引进一均匀层流，在其流动方向有一速度梯度但折射率没有任何改变，于是，当一声波沿流动方向传播时，可以预期只有一因平均流

动的推移引起的波前加速度或减速度，不能预期后向散射波或反射波的生成，因为在任一点都可作 Galileo 变换到在每一点都以平均流速移动的局部坐标系。自然，当我们从均匀梯度变为无规梯度时，所涉及的物理过程保持不变（虽然现在应加入衍射效应）。

与镜子不同，大气不可能维持实际的 N' 或 M' 的不连续性，两种类型的起伏都保持光滑的变化并在可观的距离上相关。按惯例，我们以距离 l_0（内尺度）表示湍流保持惯性区特征的最小距离，而以 L_0（外尺度）表示各向同性湍流相关性不可忽略的最大距离；测量表明 l_0 从几毫米变化到 1cm 左右，而 L_0 约为 10m 到几十米之间。然而在各向异性涡流中相关性可能延展直到几百 m，因此虽然湍流是无规的，不为 0 的相关距离就意味着一种完全不同于无规分布的点散射体场所产生散射的相互作用或散射。只要波长 λ 不大于 L_0，从相邻区域散射的波就既可以相长干涉也可以相消干涉，以产生一部分相干的散射波。因此相互作用本身就可描述为“相干散射过程”，这一过程是由于一非 0 空间区域内许多小散射的积分效应造成的。

相干波与相干散射过程是有区别的，这种区别的一个实际推论是：对于典型的声波波长，相干散射中的强度要比不相干散射（诸如 Rayleigh 散射）中的大得多；第二个推论是：对于后向散射，折射率起伏可被看成是一组间距为 $\lambda/2$ 的平行的部分反射镜。或者更普遍地说，对于任一散射角，湍流可被看成是一晶格间距满足 Bragg 条件 $l=(\lambda/2)/\sin(\theta_s/2)$ 的规则晶格，只要 $(\lambda/2)\leqslant L_0$，就可用空间 Fourier 变换来分解无规湍流场，并求出满足 Bragg 条件和产生相干散射的 Fourier 分量。正因为如此，Fourier 变换以及起伏的三维空间频谱才在声波与湍流相互作用的理论分析中占有如此重要的地位。

按定义，声功率为每单位截面积的声能流率 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$，而功率谱或功率谱密度 $I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$ 为每单位截面积、每单位频率间隔的能流量。既然 $p(\boldsymbol{x},t)$ 为每单位面积上的力而 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 为单位时间内的位移，所以乘积 $p(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 就是 $\boldsymbol{u}$ 方向上每单位面积的瞬时能流。对于单频连续声波通过一非无规介质的传播，我们所关心的能流密度就是 $p(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 在一周内的平均。但这一定义对多频声和湍流大气中与无规速度起伏相互作用着的声波无用。因此，作为替换，我们来考虑脉冲长度为 l_p 的声脉冲的传播和散射，这要求我们使用接收信号两种“选通”类型中的一种。

对于传播，我们有兴趣的是“时间选通”，即在脉冲经过的时刻 T 附近以周期 l_p/c_0 来开、关接收器。对于散射，我们也只对类似的测量有兴趣，例如，考虑后向散射，对于每一距离范围 R，长度为 l_p 的脉冲的散射信号来自一厚度为 $l_p/2$ 的区域；因此 $l_p/2$ 就是大气的最小空间分辨本领，而相应的区域产生长度为 l_p 的散射信号。于是，对于散射，我们有兴趣的是“距离选通”，即在时刻 $2R/c_0$ 附近接收信号对周期 l_p/c_0 的平均，这一平均给出了距离 R 处从厚度为 $l_p/2$ 的大气层所能得

到的全部信息。因此,对于传播和散射两种情形,我们有兴趣的声功率就是时刻 T 或 $2R/c_0$ 的瞬时功率对脉冲长度(对总体脉冲的平均值)l_p 的时间平均;声能流密度:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \frac{c_0}{l_p}\int_{-l_p/2}^{l_p/2} \mathrm{d}t\langle p(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\rangle \tag{4.35}$$

其中〈 〉表示总体平均。

如将 $p(t)$和 $\boldsymbol{u}(t)$用它们的 Fourier 变换 $P(k)$和 $\boldsymbol{U}(k)=\mathrm{i}k^{-1}\nabla P(k)$来表示,并如假定一脉冲长度中含有许多个波长(实际上至少是 10 个),上式就可写为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = (2\pi/l_p)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\langle P^{\dagger}(k)[-\mathrm{i}k^{-1}\nabla P(k)]\rangle \tag{4.36}$$

此外如再假定 $P(k)$不是太宽,就可作近似:$-\mathrm{i}k^{-1}\nabla P(k)\approx \boldsymbol{e}P(k)$,这里 $\boldsymbol{e}$ 为 $\boldsymbol{S}$ 方向的单位矢量,这给出

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}(2\pi/l_p)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\langle P(k)P^{\dagger}(k)\rangle \tag{4.36a}$$

或如定义 $S(\boldsymbol{x},\theta_s)=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$,$\theta_s$ 表 $\boldsymbol{S}$ 的方向,则可写出其标量形式

$$S(\boldsymbol{x},\theta_s) = (2\pi/l_p)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\langle P(k)P^{\dagger}(k)\rangle \tag{4.36a$'$}$$

在统计理论中,将一函数的"功率谱密度"定义为该函数自协方差的 Fourier 变换。这一定义可充分修正以说明"非各态经历过程"甚至不稳定过程①;这种方法也可用于脉冲系列,实质上就是略去在此已无意义的脉冲间隔时间[101]。这一方法包含一双重平均步骤:其间有一时间延迟 τ 的两个声压之乘积对每一脉冲时间取平均,产生一只是 τ 的无规函数集合,每一脉冲的起始时间化为只是该集合每一单元的一个标记;然后将此双重平均函数作从 τ 到 k 的 Fourier 变换以得到功率谱密度。利用声压这一"间歇性"自协方差,可证明声压的统计功率谱密度:

$$I(k) = (2\pi/l_p)\langle P(k)P^{\dagger}(k)\rangle \tag{4.37}$$

将上式与(4.36a$'$)式比较,可看出(每单位面积的)总功率正是 $I(k)$遍及所有波数的积分:

$$S(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}kI(k) \tag{4.38}$$

上面这个说明频谱与能流之间关系的式子也表明:$I(k)$就是频率空间中 $S(\boldsymbol{x})$的密度。因此,事实上,声压的统计功率谱密度就是每单位频率间隔、每单位面积的能流率,即声功率谱密度。对于波数为 k_0 而频谱未被加宽的连续声波,(4.37)式化为 $I(\boldsymbol{x},k)=S(\boldsymbol{x})\delta(k-k_0)$,这里 δ 表示 Dirac 函数。

---

① 参阅 Jenkins G. M, Watts D. G. Spectral Analysis and Its Applications. Holden-Day, 1968;或 Koopmans L. H.. The Spectral Analysis of Time Series. Academic, 1974。

4.4 湍流大气中的声散射

4.4.1 散射截面

大气中 N 和 M 的起伏对声波的散射是大气声遥感术(详见第 8 章)的物理基础。对接收信号特性的测量并以之与发射信号已知特性的比较，提供出关于距离 R 处散射体积 V_s 内大气以声学方法可得到的全部信息。这样的比较必须以几个步骤来完成：首先要将散射能流密度与入射到 V_s 上的能流密度作比较；其次，要确定由于出、入发射天线和接收天线时的衍射扩展、分子吸收以及平均运动效应等所引起的能流密度变化；最后，要确定声信号与电信号之间的关系，如 Ω 为能流密度被散射的方向 θ_s 上的立体角，而 l_s 为散射体体积入射方向上的厚度，那么 $V_s=\Omega R^2 l_s$。于是，将散射截面定义为每单位散射体厚度、每单位立体角的散射能流密度 $S(\boldsymbol{x},\theta_s)$与入射能流密度 $S_0(\boldsymbol{x})$之比，就可以将入射辐射与散射体积上的散射辐射加以比较。利用上述的 V_s 表式，散射截面即为

$$\sigma_s(\theta_s) = R^2 S(\theta_s)/(V_s S_0) \tag{4.39}$$

注意，对于一平面波，$S_0(\boldsymbol{x})=(2\rho_0 c_0)^{-1}A_0^2(\boldsymbol{x})$，这里 A_0 为 P_0 的振幅。

如将不可压缩性条件引进波散射与湍流惯性范围三维频谱之间的关系，此外再利用声波方程的 Born 近似(4.33a′)，即可求得 $\sigma_s(\theta_s)$的一严格解。波动方程之 Green 函数 G 满足基本方程

$$\nabla^2 G + k_0^2 G = \delta(\boldsymbol{x}) \tag{4.40}$$

其中 $\delta(\boldsymbol{x})$为空间 Dirac 函数。上式熟知的解为

$$G(\boldsymbol{x},k_0) = (-\exp ik_0 R)/(4\pi R) \tag{4.41}$$

其中 $R=|\boldsymbol{x}|$。以 G 来表示的对冻结湍流(4.33a′)的 Born 解为

$$P_1(\boldsymbol{x},k_0) = 2G \odot \nabla\cdot(N_e'\nabla P_0) \tag{4.42}$$

其中的三维 $\boldsymbol{x}$ 空间卷积由(4.32)式定义。

将上式引入(4.36a′)式和(4.39)式即给出惯性区散射截面：

$$\sigma_s(\theta_s) = 1.52 k_0^{1/3}\cos^2\theta_s\{0.13C_n^2 + \cos^2(\theta_s/2)C_v^2/(4c_0^2)\}[2\sin(\theta_s/2)]^{-11/3} \tag{4.43}$$

其中 C_n^2，按照(1.6)式，依赖于温度和水汽的起伏强度。可以看出，当 $\theta_s=90°$时散射截面为 0，而当 $\theta_s=180°$时仅 N 的起伏对 σ_s 有贡献。我们注意到：因为对散射有贡献的湍流涡旋尺寸 l 为 $l=(\lambda/2)/\sin(\theta_s/2)$，并因当 $\theta_s\to 0$ 时 $l\to\infty$，所以 $\theta_s=0$ 附近的点绝不可能容许远场散射(远场由 $R\geqslant 2l^2/\lambda$ 给定)；特别是，不再能将(4.43)式用于传播。当平均风不再是 0 时，即使冻结湍流条件在随风而动的坐标系中仍适用，也应料想到$\sigma_s(\theta_s)$会有某些变化，其主要效应为，散射截面为 0 的位置从 $\theta_s=90°$偏移一小角度[102]，该角度产生于入射波波矢和散射波波矢的旋

转。图 29 上给出这一效应的典型例子，表明在 $\theta_s=90$ 附近测量可能会发生很大起伏，对于后向散射和接近后向散射，平均风的存在只使 σ_s 产生很小变化。

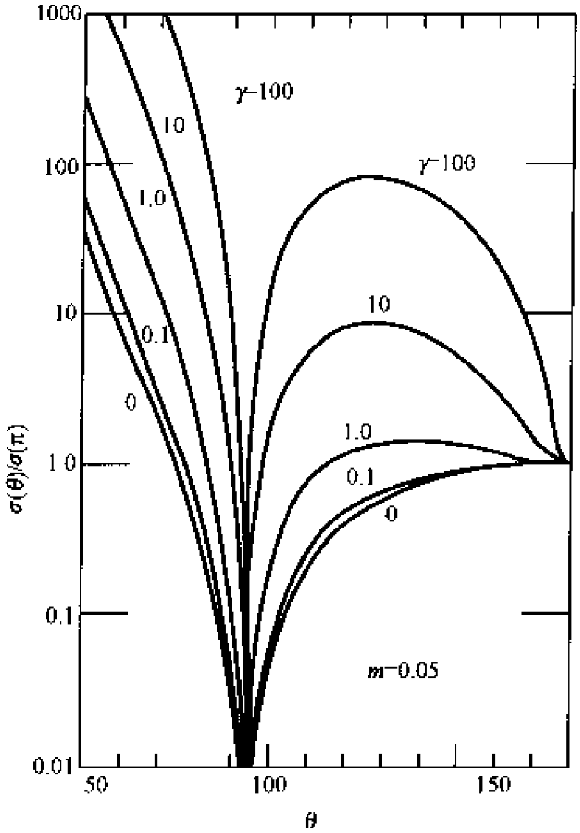


图 29 15m/s 的平均风所引起的散射截面典型形变，$\gamma=C_v^2T_0^2/C_T^2c_0^2$

4.4.2 功率比

接收功率与发射功率之比是个很重要的量，类比于电磁波的"雷达方程"，它可以用所谓的"声达(或回声探测器)方程"来表达①。对于一角宽度很窄的发射声束，人射声能流密度的衍射损失在整个发射束路程长度 R_0 上都可以很小，但散射声总是要遭受到这种损失，而在远场归结为因子 R_s^{-2}。当然，无论发射声束还是接收到的声束都要在各自的路径上因分子吸收而衰减，当散射体积离发射器而去时，该体积对声能的接收率将降低；反之，当该体积向着发射器移动时，接收率将升高[103]。在散射体积与接收器之间存在着类似效应。以 $\boldsymbol{e}_0$ 表示发射波方向的单位矢，初始能流密度在向着散射体积移动时要改变为原值乘以因子 $(1+\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{M})^{-1}$；以 $\boldsymbol{e}_s$ 表示散射方向的单位矢，散射能流密度在向着接收器移动时要改变为原值乘以

① 关于此方程(及其他有关方程)的推导以及有关声散射的进一步讨论将在第 8 章第 2 节中结合大气声遥感的具体系统来进行。

$(1-\boldsymbol{e}_s\cdot\overline{\boldsymbol{M}})^{-1}$。与此同时，脉冲长度由于平均风而伸长，使参照于地面上的脉冲长度和声束宽度的散射体积也改变为原值乘以$(1+\boldsymbol{e}_0\cdot\overline{\boldsymbol{M}})^{-1}$。因此在比较发射与接收功率时，只留下因子$(1-\boldsymbol{e}_s\cdot\overline{\boldsymbol{M}})^{-1}\approx 1+\boldsymbol{e}_s\cdot\overline{\boldsymbol{M}}$。尽管能流率改变了，但没有能量损失或增加。由于只考虑线性的声传播，总能量仅在地面与散射体积之间随时间变化的距离上不同地扩张。对于从移动的刚性镜面上的能量反射，能流率的变化应为从 V_s 上散射者的两倍，严格对应于 Doppler 频移。在这里，当$\boldsymbol{e}_0\cdot\overline{\boldsymbol{M}}$为正时，风所造成的 V_s 的扩张补偿了由于同样的风所造成的发射功率的降低，仅剩下对接收器的散射辐射流的降低。

结合到利用散射探测大气的具体设备①，可令：以 $\mathscr{P}_R$ 表示接收电功率，ε_R 为声—电转换效率，$\mathscr{P}_T$ 为发射功率，ε_T 为电-声转换效率，$\hat{a}$ 为有效声强衰减系数(Np/m)，A_R/R_s^2 为天线孔径 A_R 在距离 R_s 处所张立体角，A_T 为发射器面积，A_c 为发射束和接收束定出之共同面积，g 为天线的指向性增益因子，即可写出如下形式的声探测器方程②：

$$\mathscr{P}_R/\varepsilon_R=\varepsilon_T\mathscr{P}_T\exp[-\hat{a}(R_0+R_s)](1+\boldsymbol{e}_s\cdot\overline{\boldsymbol{M}})A(\theta_s)(l_p/2)(gA_R/R_s^2)\sigma(\theta_s) \tag{4.44}$$

量纲一的“状况因子”$A(\theta_s)$将在第 8 章中结合方程(8.30)详细讨论。不难直接验证：(4.44)式仅仅为 σ_s 的定义(4.39)式的另一种表述，以发射器处、接收器处和散射体积 V_s 处的能量流通量之间的关系代入即可看出这一点(注意：对于后向散射，$\boldsymbol{e}_s=-\boldsymbol{e}_0$)。方程(4.44)表示出理论与实验之间的联系和探测器电功率测量与 C_n^2 和 C_v^2 的值(它们出现在波散射与湍流之间的理论关系中)之间的联系。

4.4.3 功率谱

早期文献曾研究过仅由速度起伏散射产生的功率谱 $I(k)$与散射角 θ_s 的关系[104]，其基本假定是：因为散射依赖于数量级为 $\lambda/2$ 的涡旋，如 $\lambda\ll L_0$(L_0为某一客观标度)，则可作出近似分离：将推移小涡旋的大涡旋分离为小的散射涡旋——这一条件称为“局部冻结”假说。而对推移速度坐标系作局部 Galileo 变换，就可应用寻常的局部各向同性、均匀、惯性区湍流谱。如 $\boldsymbol{K}$ 为由 $K(\boldsymbol{e}_0-\boldsymbol{e}_s)$($K=2k_0\sin(\theta_s/2)$，Bragg 条件)给出的波散射矢，$\boldsymbol{M}_L$ 为大尺度涡旋的 Mach 矢而 τ 为由大尺度运动引入相关性的时间延迟，则随时间变化的湍流谱与局部面定谱以

---

① 将在第 8 章中详细讨论。

② 该方程与第 8 章中的方程(8.30)只是形式上的不同，只要注意到 $\mathscr{P}_R/g\varepsilon_R A_R=I_{sc,ap}$，$\varepsilon_T\mathscr{P}_T=(4\pi r^2 I_i)_0\Delta\Omega_{tr}/4\pi$，$R_s=\overline{R}$，$\sigma_s=\eta/4\pi$，$l_p=c\tau$。并应注意在这里未考虑背景风，亦未考虑沿射线(从发射器到散射体积再从散射体积到接收器)的衰减。形式如(4.44)的方程便于这里的讨论，而且熟悉两种不同形式的方程是有益的。

如下之“局部冻结湍流谱”相联系：

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{K},\tau) = \langle \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot \boldsymbol{M}_L c_0 \tau)\rangle_V \Phi_{ij}(\boldsymbol{K}) \tag{4.45}$$

其中带下标 V 的〈〉表示大尺度运动的体积平均。

用(4.45)式可求出速度起伏散射的 $I(k)$，但利用 Born 近似假定和有效折射率 N'_e，可将其结果推广到同时存在速度起伏和折射率起伏的情形，于是可将 $I(k)$ 写为形式[99]

$$I(k-k_0) = S(\boldsymbol{x},k)\mathscr{F}_T\langle \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot \boldsymbol{M}_L c_0 \tau)\rangle_V \tag{4.46}$$

现如假定 $\boldsymbol{M}_L$ 的分量具有 Gauss 概率分布，则可利用等式 $\langle \exp \boldsymbol{x}\rangle = \exp \bar{\boldsymbol{x}} \exp(1/2\langle \boldsymbol{x}'^2\rangle)$，这里 $\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{x}'$ 而 $\bar{\boldsymbol{x}}=\langle \boldsymbol{x}\rangle$，这样(4.46)式即成为

$$I(k) = S(\boldsymbol{x})[2\pi\langle(\boldsymbol{K}\cdot \boldsymbol{M}'_L)^2\rangle]^{-1/2}\exp[-(k-k_0+\boldsymbol{K}\cdot \overline{\boldsymbol{M}}_L)^2/2\langle(\boldsymbol{K}\cdot \boldsymbol{M}'_L)^2\rangle] \tag{4.47}$$

当声波波前通过湍流或为其所散射时，波前受到无规的撞击而造成不规则性，而当这种不规则性漂过路径时，相位就会随时间改变，瞬时频率 $d_t\varphi$ 也会产生起伏。因此观测到的信号频谱将展宽，展宽程度取决于平均横向风的大小。如在(4.45)式或(4.47)式中令 $\boldsymbol{M}'_L=0$，$I(k)$ 并不退化为单由平均风引起的展宽频谱。这一步骤使(4.47)中的 Gauss 函数退化为 Dirac 函数而可以假定 $I(k)=S(\boldsymbol{x})\delta(k-k_0+\boldsymbol{K}\cdot\overline{\boldsymbol{M}})$，即 $I(k)$ 为一未展宽的频谱，而只是由于风造成了 Doppler 频移，这一矛盾是因为在局部冻结处理(4.45)式中略去了相位起伏的缘故。

在更谨慎的处理中应既计人相位起伏又要利用局部冻结假说以确定对散射频谱的影响。在文献[105]中仅将相位起伏与冻结湍流假定(Taylor 假说)相结合以确定 $I(k)$。在该研究中考虑一有限散射体积 V_s，由一有限脉冲长度 l_p 和有限接收器束半宽度 ψ 确定。由于有限的束宽，并非所有的散射元都在 $\theta_s=180°$ 处，因此折射率起伏和速度起伏二者都对频谱有贡献。长度有限的脉冲具有非零的谱宽，同样，V_s 的有限性也使频谱展宽(但是在很小程度上)，因而这一研究计及了所有的展宽机制，而不仅仅是由于较大涡旋对散射涡旋的推移。

4.5　声波在静止大气中的衍射

在通常涵义下，从散射到衍射是一种“量变到质变”过程：当散射体尺寸比散射声的波长大得多时，通常说声音被反射和衍射，而不说被散射，实际效应虽然相同，但相对量值相差很大，以致似乎存在一质的差别，而在大气声学中，衍射主要指声波透入影区的现象。

在大气的某些剖面下，从一定声源出发的声线(直达的、反射的、折射的)有可能到达不了某一区域而形成影区，如图 30 中所示的就是一个例子，在影区内声压

振幅小至消失，但振幅并非从“亮区（即声线可以到达的区域）”中的值不连续地一下子下降到0，而是在这值附近做增幅振荡，在紧靠影区边缘前方达到其极大值，然后单调下降，在深入影区相当距离处趋于0，现在就以一具体情况来研究这一现象的本质。

设声速 $c(z)$ 随高度线性递减，而声源位于地面附近的高度 z_0 处（图 30）。在本章第 3.1 节中已计算出这种情况下的折射声线为向上弯曲的圆弧，其曲率半径为 $R=c/|c'(z)|$（同往常一样，这里和以后的撇号表示对宗量 z 的微商），在这些射线中有一条“极限射线”，它与地面相切并成为所形成影区的边缘。由简单的几何关系容易看出，给定水平距离 w 比 R 小很多，则影区系由 $w>(2Rz_0)^{1/2}+(2Rz)^{1/2}$ 的点组成，下面就来计算 w 比波长大很多的情形下这一影区内的声场。由于几何声学不再适用，所以我们直接以波动法入手。

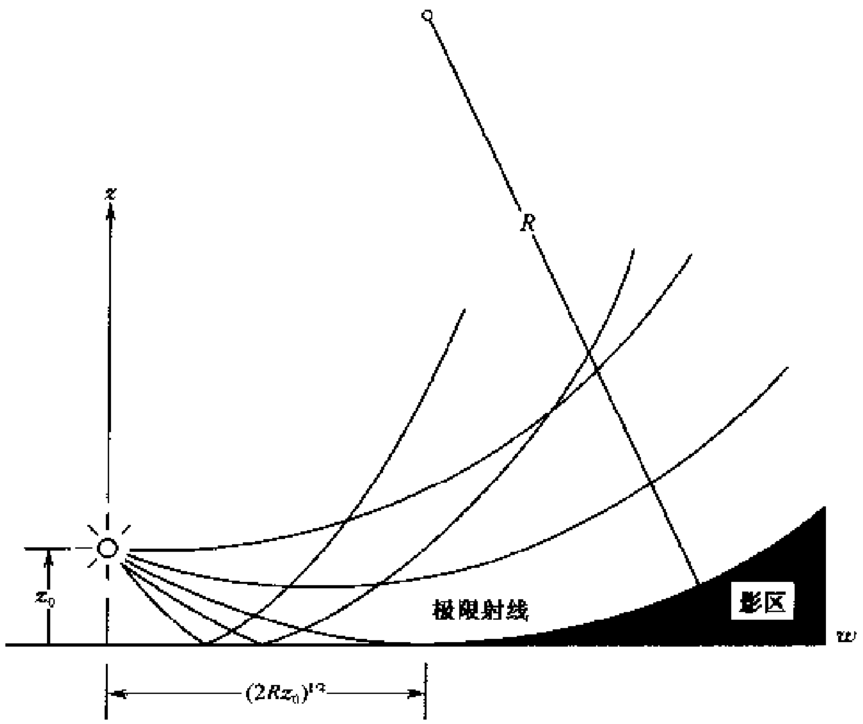


图 30 在声速随高度线性递减的大气中形成的影区

4.5.1 局部反应表面上空的点声源

设点源为一振幅为 $\hat{S}$ 的单极子，辐射出角频率为 ω 的声波。如果略去密度梯度，声压复振幅便满足有源的 Helmholtz 方程——在右端补充以源项 $-4\pi\,\hat{S}\,\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)$（这里 δ 为 Dirac 函数）的方程(2.11)，并以 $\omega^2/c^2(z)$ 代替其中的 k^2。

为了得到解，我们采用对 x 和 y 的双重 Fourier 变换的下列表达式为出发点：

$$\hat{p} = -\frac{\hat{S}}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2(\alpha^2+\beta^2)} e^{i\alpha x} e^{i\beta y} Z(z,\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta \tag{4.48}$$

如函数 Z 满足下列方程则上式即满足非齐次（有源）的 Helmholtz 方程：

$$Z'' + \left[\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2\right]Z = \delta(z - z_0) \tag{4.49}$$

其中 $k^2=\alpha^2+\beta^2$。

由于声场是柱面对称的，故如在(4.48)式中以 0 代替 y 并令 $x=w$ 该式不会改变。将积分变量由 k 变为 $\theta(\alpha=k\cos\theta,\beta=k\sin\theta)$，则可以完成对 θ 的积分，因由(4.49)式可相信 Z 与 θ 无关。指数式 $\exp(ikw\cos\theta)$ 对 θ 从 0 积分到 2π 恰巧是零阶 Bessel 函数①：

$$\int_0^{2\pi} e^{ikw\cos\theta}\,d\theta = 2\pi J_0(kw)$$

因此我们得到

$$\hat{p} = -\hat{S}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\infty} e^{-\epsilon^2 k^2} 2J_0(kw)Z(z,k)k\,dk \tag{4.50}$$

如本节一开头指出的那样，我们只对大的 kw 值有兴趣，因此可利用 Bessel 函数相应的渐近表达式：

$$J_0(\eta) \approx \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-i\pi/4}\left[\frac{1}{\eta^{1/2}}e^{i\eta} - \frac{1}{(-\eta)^{1/2}}e^{-i\eta}\right] \tag{4.51}$$

其中对于>0 的 η，$(-\eta)^{1/2}$ 应被理解为 $e^{i\pi/2}\eta^{1/2}$。因此，将 $Z(z,k)$ 看成是 k 的偶函数，即可将(4.50)式改写为

$$\hat{p} \approx -\left(\frac{2}{\pi w}\right)^{1/2}\hat{S}\,e^{-i\pi/4}\int_{\infty}^{\infty} k^{1/2} e^{ikw} Z(z,k)\,dk \tag{4.50'}$$

其中对于<0 的 k，$k^{1/2}$ 为 $e^{i\pi/2}|k|^{1/2}$。这一积分现在可看成是一回路积分，其中 $k^{1/2}=|k|^{1/2}\exp(i\varphi_k/2)$，$k$ 的相位 φ_k 的值被限制在 $-\pi/2$ 与 $3\pi/2$ 之间。(4.50)式中的收敛因子 $\exp(-\epsilon^2k^2)$ 现在可以略去，因为如果该积分收敛得很勉强，总可以将回路变形离开实轴，使得当 $|k|$ 在无论回路的哪一端趋于∞时 e^{ikw} 总是指数性地趋于 0。

至于满足方程(4.49)的函数 $Z(z,k)$，当 k 为正实数时，可设想为齐次方程的两个解 $\Psi(z,k)$ 和 $\Phi(z,k)$，它们分别满足与 Sommerfeld 辐射条件相一致的上边界条件和 $z=0$ 处的下边界条件。上边界条件是：对于实数 k，Ψ 或者指数性地消失或者表现为一斜着向上传播的波；下边界条件对应于一比声阻抗为 Z_s 的局部反应

① 参阅 G. N. Watson. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed.. Cambridge Univ. London: Press, 1966; 24～25; 328～338。

界面，即为①

$$\Phi' + \mathrm{i}\frac{k_0 \rho c}{Z_s}\Phi = 0, \quad z = 0 \tag{4.52}$$

其中 $k_0 = \omega/c(0)$。对于复数的 k，除了在支线上外函数 Ψ 和 Φ 均应被理解为是解析的。

非齐次方程(4.49)的解 $Z(z,k)$ 对于 $z>z_0$ 是 $A\Psi(z,k)$ 而对于 $z<z_0$ 是 $B\Phi(z,k)$，这里的常数 A 和 B 是使得 Z 在 z_0 处是连续的，但其斜率有一等于 1 的不连续性。因此我们有

$$Z(z,k) = \frac{\Psi(z_>,k)\Phi(z_<,k)}{[\Psi'\Phi - \Phi'\Psi]_{z_0}} \tag{4.53}$$

其中 $z_<$ 和 $z_>$ 分别代表 z_0 和 z 两者之中较小的和较大的一个。因 Ψ 和 Φ 都满足与(4.49)式对应的齐次(右端为 0)微分方程，所以(4.53)式中的分母表式(即 Ψ 和 Φ 的 Wronski 行列式)与 z_0 无关；因而利用(4.52)式可将它重新表示为

$$(\Psi'\Phi - \Phi'\Psi)_{z_0} = \left(\Psi' + \frac{\mathrm{i}k_0\rho c}{Z_s}\Psi\right)_0 \Phi(0,k) \tag{4.54}$$

在只限于近地面(低高度)声场的范围内，可假定 $c(z)$ 无定限地随高度递减。这一理想化假定使有可能从适当小 z 值下的行为来预言 Ψ 的待定函数是否将满足上边界条件；这样微分方程就可将 $1/c^2(z)$ 换为 $[1/c^2(0)](1+2z/R)$ 而得到近似变换，这里 $R=c(0)/|c'(0)|$ 为从声源水平出发传播的射线的曲率半径，在这一近似下，齐次方程成为

$$\Psi'' + \left(k_0^2 - k^2 + \frac{2k_0^2 z}{R}\right)\Psi = 0 \tag{4.55}$$

4.5.2 影区内的声场表式

不难看出，方程(4.55)与我们以前研究过的方程(2.51)属于同一类型，从而也可用 Airy 函数求解。如果引进参量

$$\tilde{\tau} = (k^2 - k_0^2)l^2, \quad y = \frac{z}{l}, \quad l = \left(\frac{R}{2k_0^2}\right)^{1/3} \tag{4.56}$$

将方程(4.55)改写，那么它的一个可能的解就是 $Ai(\tilde{\tau}-y)$，而另外 $Ai((\tilde{\tau}-y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})$ 和 $Ai((\tilde{\tau}-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3})$ 也是解。只有两个线性独立解，乘以任一常数的解也是解。在对类似问题的各种解进行研究之后，推荐的两个解是②

① 如在第 2 章第 3.1 节中所指出的，刚性界面的相应边界条件是 $\Phi'=0$(因 $Z_s\to\infty$)而对压力释放界面，有 $\Phi=0$。

② 参见 Fock V. A. Electromagnetic Diffraction and Propagation Problem. London: Pergamon, 1965: 237,379~381。

$$\upsilon(\eta)=\pi^{1/2}Ai(\eta),w_1(\eta)=2\pi^{1/2}e^{i\pi/6}Ai(\eta^{i2\pi/3}) \tag{4.57}$$

这里的 $\eta=\tilde{\tau}-y$。

之所以选用 $w_1(\eta)$，是因为它具有渐近行为

$$y\rightarrow\infty; w_1(\tilde{\tau}-y)\rightarrow\frac{e^{i\pi/4}}{y^{1/4}}e^{i(2/3)y^{3/2}}e^{-i\tilde{\tau}y^{1/2}} \tag{4.58}$$

这一性质可由(2.53a)式和(2.53b)式推得，并代表一斜着向上传播的波。因而 $w_1(\tilde{\tau}-y)$ 是一恰当的解 $\psi(z,k)$。

满足方程(4.52)的函数 $\Phi(z,k)$ 可取为

$$\Phi(z,k)=\upsilon(\tilde{\tau}-y)-\frac{\upsilon'(\tilde{\tau})-q\upsilon(\tilde{\tau})}{w'_1(\tilde{\tau})-qw_1(\tilde{\tau})}w_1(\tilde{\tau}-y) \tag{4.59}$$

撇号表示对宗量的微商，而 $q=ik_0l\rho c/Z_s$。以上而这些结果代入后，(4.53)式即化为

$$Z(z,k)=\frac{w_1(\tau'-y_>)\Phi(z_<,k)l}{\upsilon'(\tilde{\tau})w(\tilde{\tau})-w'_1(\tilde{\tau})\upsilon(\tilde{\tau})}=-w_1(\tau'-y_>)\Phi(z_<,k)l \tag{4.60}$$

化到第二步是利用了 Airy 微分方程的一个性质：其两个解的 Wronski 行列式 $\upsilon'w_1-w'_1\upsilon$ 为一常数；将渐近表达式代入行列式中即可得出它的值等于-1。

对于近地面(低高度)的接收点来说，在影区之内和附近，对积分(4.50′)式的主要贡献来自与 k_0 相差不大的那些 k 值。这正是所预期的，因为积分可看成是平面波与渐消波的叠加，而以量级为 $c(0)=\omega/k_0$ 的水平相速度传播的波在地面附近较大水平距离处居支配地位。因而我们一开始就作了与这一预期相一致的近似；而最终导出的结果支持了这一假设。特别是，我们用 $k_0^{1/2}$ 来取代被积函数中的乘数因子 $k^{1/2}$，并用 $2k_0(k-k_0)$ 来近似地取代 $\tilde{\tau}$ 的表式(4.56)中的 $k^2-k_0^2$，这样 $\tilde{\tau}\rightarrow\tau=(2k_0l)^2(k-k_0)$。

将(4.50′)式中的积分变量变换为 τ，从而将复压力振幅化为标准表式

$$\hat{p}=\frac{\hat{S}}{w}e^{ik_0w}V(\xi,y_0,y,q) \tag{4.61}$$

其中

$$V(\xi,y_0,y,q)=e^{-i\pi/4}\left(\frac{\xi}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi\tau}w_1(\tau-y_>)\cdot\left[\upsilon(\tau-y_<)-\frac{\upsilon'(\tau)-q\upsilon(\tau)}{w'_1(\tau)-qw_1(\tau)}w_1(\tau-y_<)\right]d\tau \tag{4.62}$$

为 Фок 形式下的 van der Pol-Bremmer 衍射公式；其中 $\xi\equiv w/2k_0l^2=(k_0R/2)^{1/3}w/R$；$y_0\equiv z_0/l(2k_0^2R^2)^{1/3}(z_0/R)$。

4.5.3　衍射公式的级数表式

由(4.57)式中的定义和渐近关系式(2.53a)、(2.53b)可得出结论：当τ在上半平面$\mathrm{Im}\,\tau>0$中趋于∞时，(4.62)式中的被积式趋于0。如果$\xi-y_0^{1/2}-y^{1/2}>0$(这一条件相当于$w>(2Rz_0)^{1/2}+(2Rz)^{1/2}$，即观察者位于影区内——参阅图30)。在这样的情况下积分可用将回路变形方法算出，并等于$2\pi\mathrm{i}$乘以对应于上半平面内极点处留数之和。这些极点就是被积式分母$w_1'(\tau)-qw_1(\tau)$的零点$\tau_n(n=1,2,\cdots)$。在$\tau=\tau_n$附近，该分母可近似地表示为$[w_1''(\tau_n)-qw_1'(\tau_n)](\tau-\tau_n)$，或者，因为$w_1'(\tau_n)=qw_1(\tau_n)$并且因为由(2.51)式得出$w_1''(\tau)=\tau w_1(\tau)$，近似为$(\tau_n-q^2)\cdot w_1(\tau_n)(\tau-\tau_n)$。再者，等于$-1$的Wronski关系式和上面已用过的$w_1'(\tau_n)$定义给出$v'(\tau_n)-qv(\tau_n)=-1/w(\tau_n)$。因此，关于$V$的留数级数表达式成为

$$V=(\xi,y_0,y,q)=(4\pi\xi)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\sum_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_n\xi}w_1(\tau_n-y_0)w_1(\tau_n-y)}{(\tau_n-q^2)[w_1(\tau_n)]^2}\qquad(4.63)$$

如果用w_1'/q来代换w_1，则上式中的分母可改写为$[(\tau_n/q^2)-1][w_1'(\tau_n)]^2$。前一种形式适用于极限情形$q\to0,Z_s\to\infty$，这相应于刚性地面；后一种形式适用于极限情况$q\to\infty,Z_s\to0$，相应于压力释放界面。

因为大部分实际上感兴趣的情况都可用上述两种极限情形中的一个来逼近，还因为Airy函数$\mathrm{Ai}(\eta)$或其微商$\mathrm{Ai}'(\eta)$的零点全部是实数，所以接下来我们将τ_n置换为$b_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3}$①。对于刚性界面，$b_n$就是$Ai'(a_n')=0$的根$a_n'$；面对于压力释放界面，$b_n$就是$Ai(a_n)=0$的根$a_n$——这些可从(4.57)式和$\tau_n$应满足$w_1'(\tau_n)-qw_1(\tau_n)=0$这一要求得到验证。由于$a_n'$和$a_n$全都是负的，每一相应的$\tau_n$值都应位于$\tau$复平面的第一象限中$\tau$相位为$\pi/3$的线上。相继各个$\tau_n$的虚部因而随着$n$逐步增大，故如$\xi$足够大，给定$y$和$y_0$后，求和式(4.63)就可以其开首第一项来近似。按此，分别对刚性界面和压力释放界面给出

$$V(\xi,y_0,y,0)\approx(4\pi\xi)^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/12}\exp(\mathrm{i}a_1'\xi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3})\frac{f_1(y_0)f_1(y)}{(-a_1')}\qquad(4.64\mathrm{a})$$

$$V(\xi,y_0,y,\infty)\approx(4\pi\xi)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}\exp(\mathrm{i}a_1\xi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3})g_1(y_0)g_1(y)\qquad(4.64\mathrm{b})$$

其中采用了省略符号

---

① b_n为$Ai'(b)+\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}(\rho c/Z_s)k_0lAi(b)=0$的根，故对于$|\rho c/Z_s|k_0l\ll1$(接近于刚性界面)，$b_n\approx a_n'+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}(\rho c/Z_s)k_0l/a_n'$，而对于$|\rho c/Z_s|k_0l\gg1$(接近于软界面)，$b_n\approx a_n+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}Z_s/\rho ck_0l$。因$k_0l=(k_0R/2)^{1/3}$随频率增加，阻抗为有限的任何界面在频率足够高时都接近于软界面。例如，当$\nu=1000\mathrm{Hz}$，$c=340\mathrm{m/s}$，地面阻抗$Z_s=5\rho c(1+\mathrm{i})$时，$|\rho c/Z_s|k_0l$为$0.30R^{1/3}$($R$为以m为单位的曲率半径)。因此，对于使$R>10\,000\mathrm{m}$的大气剖面，将边界条件理想化为压力释放界面上的边界条件更为恰当。可参阅R. Onyeonwu. Diffraction of sonic boom past the nominal edge of the corridor, J. Acoust Soc. Am, 1975, 58: 326～330。

$$f_1(y) = \frac{Ai(a_1' - ye^{i2\pi/3})}{Ai(a_1')} = \frac{w_1(a_1' e^{-i2\pi/3} - y)}{2\pi^{1/2} e^{i\pi/6} Ai(a_1')} \tag{4.65a}$$

$$g_1(y) = \frac{Ai(a_1 - ye^{i2\pi/3})}{Ai'(a_1)} = \frac{w_1(a_1 e^{-i2\pi/3} - y)}{2\pi^{1/2} e^{i\pi/6} Ai'(a_1)} \tag{4.65b}$$

其中涉及的具体数值是：$e^{i2\pi/3}=(-1+i\sqrt{3})/2$，$a_1'=-1.0188$，$Ai(a_1')=0.5357$，$a_1=-2.3381$，$Ai'(a_1)=0.7012$。在两种情况中无论哪一种，如果 $\xi-y_0^{1/2}-y^{1/2}$ 稍大于1，都可证明这种"截短"级数只取其第一项的做法是一个合理的近似①。

如 y 和 y_0 都是中等程度的大小，函数 $w_1(b_1 e^{-i2\pi/3}-y)$ 和 $w_1(b_1 e^{-i2\pi/3}-y_0)$ 就可以用形式如(4.58)式的渐近表式来取代，这样(4.63)式的开首第一项就化为

$$V \approx \frac{e^{i\pi/12}\xi^{1/2} e^{i(2/3)y^{3/2}} e^{i(2/3)y_0^{3/2}}}{K_1(q) y_0^{1/4} y^{1/4}} \exp[e^{-i\pi/6} b_1(\xi - y_0^{1/2} - y^{1/2})] \tag{4.66}$$

$$K_1(q) = (4\pi)^{1/2}(-b_1 + q^2 e^{i2\pi/3})[Ai(b_1)]^2 \tag{4.67}$$

$$= (4\pi)^{1/2}\left(1 - \frac{b_1}{q^2} e^{-i2\pi/3}\right)[Ai'(b_1)]^2 \tag{4.67'}$$

两种形式分别适用于极限 $q\to 0$（刚性界面；$K_1(0)=1.036$）和 $q\to\infty$（压力释放界面；$K_1(\infty)=1.743$）。

4.5.4　蠕波

(4.61)式和(4.63)式所隐含的内涵是：在影区内和界面上，声压振幅或任何其他声场量的振幅必定按 $w^{-1/2}e^{-aw}$ 随沿界面的距离 w 渐近地减小，这里的衰减系数(Np/m)由下式给出

$$a = \mathrm{Re}(-e^{-i\pi/6} b_1)\left(\frac{k_0}{2R^2}\right)^{1/3} \tag{4.68}$$

$$= \frac{n}{2c} f^{1/3} \left(-d_z c\right)_0^{2/3} \tag{4.68'}$$

其中 $n=2\pi^{1/3}\mathrm{Re}(-e^{-i\pi/6}b_1)$ 而 f 为频率(Hz)，对于一刚性界面 $n=2.58$，而对于压力释放界面 $n=5.93$。恒定相位线以之沿界面移动的相应速率（相速度）可类似地推出：

$$v_{ph} = \frac{c(0)}{1 + \mathrm{Im}(e^{-i\pi/6} b_1)/(2k_0^2 R^2)^{1/3}} \tag{4.69}$$

它总是小于声速 $c(0)$。

---

① 以(4.63)式与下文的(4.66)式相比较即显现出判据为

$$|\exp[e^{-i\pi/6}(b_2 - b_1)(\xi - y_0^{1/2} - y^{1/2})]| \ll 1$$

这一条件在 $\xi - y_0^{1/2} > 2/\{\mathrm{Re}[(-b_2+b_1)e^{-i\pi/6}]\}$ 时近似地被满足；此数值对刚性界面和压力释放界面分别为1.034和1.3198。

弱的衰减和略为减速的相速度是蠕波①的两大显著特征，这种波循着处处垂直于恒定相位面(在无风情况下与界面相切)的射线路径沿界面移动(图 31)，在这里所考虑的情形下，蠕波射线是从声源辐射状伸出的水平直线；但在其他情形下射线会沿着界面弯曲。除了随传播距离的很弱的指数性衰减之外，振幅还反比于沿界面传播的二相邻射线之间垂直距离(射线带宽度)的平方根而沿界面变化，在上述情况下，射线带宽度正比于 w，故将(4.66)式代入(4.61)式时会出现因于 $w^{-1/2}$。

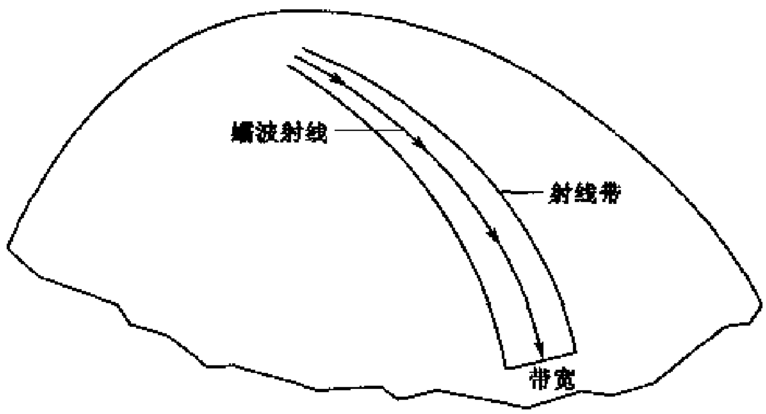


图 31 沿一界面传播的蠕波的概念

如声速为常数，蠕波射线就是短程线，界面上的振幅反比于射线带宽度的平方根而减小，同时随着沿射线的距离指数性地减小

顺便提一下，对于沿均匀介质中弯曲界面的传播[106]，蠕波射线应垂直于恒定相位面和它们应以接近于声速的速率移动这两项要求导致结论：射线应为短程线，连结界面上两点的路径应是所有可能路径中最短的，这一性质类似于 Fermat 最小时间原理。对最有实际意义的两个理想化情形"球和圆柱"来说，这路径就应分别为大圆和螺旋线。在这种情形，可局部调整坐标系和原点，使界面方程由 $z=-x^2/2R_1-y^2/2R_2$ 给出，这里 R_1 和 R_2 代表界面的两个主曲率半径。原点附近的扰动取形式 $e^{ik_x\xi}e^{ik_y\eta}F(\zeta)$，这里 $\xi\approx x-xz/R_1$，$\eta\approx y-yz/R_2$ 而 $\zeta\approx z+x^2/2R_1+y^2/2R_2$，以类似于导出方程(4.55)(其典型形式为(2.51))的近似方法可给出下面一模一样的循分方程

① 这一非常形象化的名称是 W. Franz 和 K. Depperman 首先引进的，其德文原文为 Kriechwelle (英文为 creeping waves，通常译作"爬波")，参阅他们的文章，刊于 Ann Phys. 1952，(6)10：361～373，但对这种波的预言可上推到 1919 年 G. N. Watson 的文章，"The diffraction of electric waves by the earth"，Proc. R. Soc. London，A95：83～99。而透入分层介质中一平界面之上形成的影区中的波可看成蠕波这一概念，则是 G. D Malyuzhinets 提出的，见他为纪念 T. Young 逝世 130 周年发表的文章："Development in our concepts of diffraction phenomena". Sov. Phys. Usp. 1959，69：749。

$$F''+\left(k_0^2-k^2+\frac{2k^2\zeta}{R_{\text{eff}}}\right)F=0 \tag{4.55'}$$

其中

$$k_0^2=\frac{\omega^2}{c^2},k^2=k_x^2+k_y^2,R_{\text{eff}}^{-1}=R_1^{-1}\cos^2\theta_k+R_2^{-1}\sin^2\theta_k \tag{4.70}$$

这里 θ_k 为(k_x,k_y)相对于 x 轴的方向。给定 $\zeta \ll R_{\text{eff}}$,(4.55′)式中最后一项中的 k^2 可用 k_0^2 来近似,这样就重新得到(4.55)式,只是 R 有了新的涵义;ζ 被理解为横过界面的距离。边界条件和最小衰减波的选取导致形式为 $w_1(\tau_1-\zeta/l_{\text{eff}})$ 的 Airy 函数,恰恰是(4.63)式中开首第一页,只是 z/l 为 ζ/l_{eff} 所取代,这里 $l_{\text{eff}}=(R_{\text{eff}}/2k_0^2)^{1/3}$①。

4.5.5　蠕波的几何声学诠释

尽管蠕波是纯粹由波动方法得出的一种波动概念,但是也可以用几何声学的射线概念来加以诠释。(4.66)式所隐含的内涵是:在深入影区、不靠近界面(z 稍大于 l)的地方,扰动是沿着寻常的几何声学射线传播的。然而这些射线的起源并不是声源而是蠕波(参见图 32)。这一点以(4.66)式中的 V 代入(4.61)式中即可得到验证:

$$p=\frac{e^{i\pi/12}(R^2/4k_0)^{1/6}\ \hat{S}\ e^{-\alpha\Delta w}\exp[i\omega\tau_{\text{TR}}(z_0)+i(\omega/v_{\text{ph}})\Delta w+i\omega\tau_{\text{TR}}(z)]}{w^{1/2}[K_1(q)/2^{1/2}][(2Rz_0)(2Rz)]^{1/4}} \tag{4.71}$$

其中

$$\Delta w=w-(2Rz_0)^{1/2}-(2Rz)^{1/2} \tag{4.72}$$

$$c_0\tau_{\text{TR}}(z)=(2Rz)^{1/2}+\frac{2}{3}\left(\frac{2z^3}{R}\right)^{1/2} \tag{4.73}$$

这里$(2Rz_0)^{1/2}$为声源到影区边缘的水平距离(见图 30);$(2Rz)^{1/2}$为从界面沿一射线到观察者的水平距离,该射线在$(w_0,0)$($w_0=w-(2Rz)^{1/2}$处以掠射角离开界面随后通过观察者位置。$\tau_{\text{TR}}(z)$这个量可证实为沿这一射线段的运行时间。这一点可由(3.16)式推出,该式预言 $d\tau_{\text{TR}}/dw$ 为 c_0/c^2,因对于一起始时与界面相切的射线来说 $s_w=1/c_0$。量 c_0/c^2 近似地等于$(1+2z/R)/c_0$,但沿射线 z 为$(w-w_0)^2/2R$,故 $d\tau_{\text{TR}}/dw$ 积分后得 $c_0\tau_{\text{TR}}=(w-w_0)+\frac{1}{3}(w-w_0)^3/R^2$,再以$(2Rz)^{1/2}$代替$w-w_0$即得到(4.73)式。

① 这一近似法借自关于无线电波沿地球表面(即考虑到地球本身曲率,在大气声学中有时也必须这样做)传播的类似理论,并以"展平地球"近似著称。可参阅 J. C. Schelleng et al.. Proc. Inst. Radio Eng., 1933, 21: 427~63(1933), C. L. Pekeris, Phys. Rev., 1946, 70: 518~522 和 J. Appl. Phys., 1947, 18: 667~680。

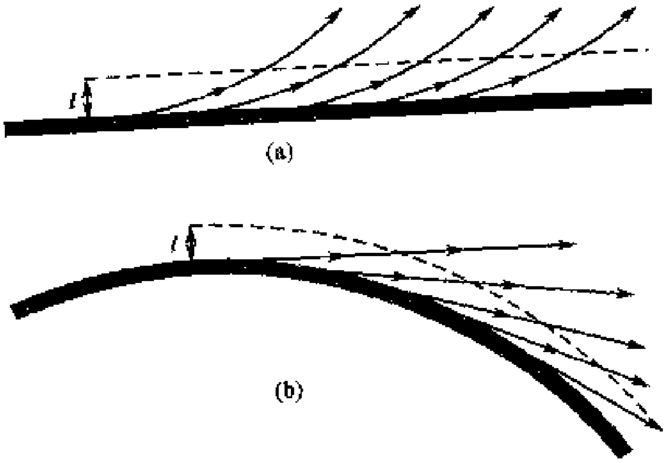


图 32　由蠕波所散发的射线

(a)平地面上空大气剖面为声速随高度线性地增加；(b)球形地面上空的均匀大气，其中声速为常数

类似地，$\tau_{TR}(z_0)$对应于沿从声源到界面上影区边缘(水平距离$(2Rz_0)^{1/2}$)的射线的运行时间。相位变化 $\omega\tau_{TR}(z_0)+(\omega/v_{ph})\Delta w+\omega\tau_{TR}(z)$因而就对应于一"折断了的"射线：以声速从声源到达地面、然后以相速度 v_{ph}沿地面延续一段距离 Δw、最后以声速从地面到达观察者。

上述结论给出以下诠释：到达(w,z)处观察者的声音是由$(w_0,0)$处的蠕波散发出去的，这一观点进一步为衰减因子 $e^{-\alpha\Delta w}$ 所支持。(w,z)处的扰动仅在从$[(2Rz_0)^{1/2},0]$到$[w_0,0]$的区间(净距离 Δw)内为蠕波所载运。

(4.71)式分母中的因子 $w^{1/2}$ 和$(2Rz)^{1/4}$也可类似地用几何声学术语加以诠释；它们的乘积正比于与通过观察者位置的射线相关联的射线管截面积的平方根。相继在 w_D 和 $w_D+\delta w_D$ 散发出的两根射线之间的垂直间隔，在横过一段距离$(w-w_0)$之后，将近似地为 $\delta z\approx-\delta[(w-w_0)^2/2R]$，或$(w-w_0)(\delta w_0/R)$。因此射线管截面积随 z 的变化就同 $w-w_0$ 或$(2Rz)^{1/2}$一样。射线管截面表式中另一个因子 w 是由于柱面扩展(从声源开始)产生的。

4.6　声波在运动大气中的衍射①

在有风的情形下，情况当然更为复杂，何况声源又是一脉冲点源，我们采用 Friedlander 关于脉冲衍射的处理方法[108]，并且通过这一处理可领略在波动声学

---

①　见文献[107]。

中占重要地位的简正波展开法的真谛。因此比较详尽地介绍这一处理过程和结果。

4.6.1 基本方程和形式解

如果不计声波中的不可逆过程并只限于线性化近似，那么在一做定常无旋运动的等熵介质中，声势 Φ 便满足方程[80]

$$d_t^2\Phi = c^2\,\nabla^2\Phi + \frac{\nabla p}{\rho}\cdot\nabla\Phi + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla\ln c^2)d_t\Phi \tag{4.74}$$

其中 c 为声速，p、ρ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别为大气未受扰动时的压力、密度和运动速度(风速)。

假定风速的 Mach 数 $M\equiv v/c\ll 1$ 并且大气各参量都只是高度 z 的缓变函数；取直坐标系并使风速 v 指向 x 轴正方向，这时(4.74)式即简化为

$$L(\Phi)\equiv(1-M^2)\partial_x^2\Phi+\partial_y^2\Phi+\partial_z^2\Phi-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\Phi-2\frac{M}{c}\partial_{x,t}^2\Phi-\frac{\rho'}{\rho}\partial_z\Phi=0 \tag{4.74a}$$

撇号表示对 z 的微商。

现设在$(0,0,z_0)$处有一可用 δ 函数来描述其行为的脉冲点声源。于是在半空间 $z>0$ 中 Φ 满足方程：

$$L(\Phi)=-4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)\delta(t) \tag{4.75}$$

在除源点以外的半空间中满足初始条件：

$$\begin{aligned}\Phi|_{t=0}&=0\\ \partial_t\Phi|_{t=0}&=0\end{aligned}\qquad x^2+y^2+(z-z_0)^2\neq 0 \tag{4.76}$$

在界面 $z=0$ 上满足下列边界条件之一(即(2.40)式或(2.41)式之一)：

$$\Phi|_{z=0}=0\ \text{或}\ \partial_z\Phi|_{z=0}=0 \tag{4.77}$$

而在无穷远处满足辐射条件。

Φ 的 Laplace 变换

$$\bar{\Phi}(x,y,z;s)=\int_0^\infty\Phi(x,y,z;t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{4.78}$$

的双重 Fourier 变换

$$\tilde{\Phi}(z;s,\kappa_x,\kappa_y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\bar{\Phi}(x,y,z;s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\kappa_x x+\kappa_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.79}$$

满足方程

$$\tilde{\Phi}''-\frac{\rho'}{\rho}\tilde{\Phi}'+q\tilde{\Phi}=-4\pi\delta(z-z_0) \tag{4.80}$$

其中

$$q\equiv\left(\frac{\mathrm{i}s}{c}-M\kappa_x\right)^2-\kappa^2,\ \kappa^2\equiv\kappa_x^2+\kappa_y^2 \tag{4.81}$$

以及相应的边界条件和辐射条件。

令 $\tilde{\Phi}_1$ 和 $\tilde{\Phi}_2$ 为对应于(4.80)式的齐次方程的两个线性独立解,则(4.80)式满足边界条件和辐射条件的解便具有如下形式[①]

$$\tilde{\Phi}(z) = -\frac{4\pi}{W}\begin{cases}\tilde{\Phi}_2(z_0)[\tilde{\Phi}_1(z) - w\tilde{\Phi}_2(z)], & z \leqslant z_0 \\ [\tilde{\Phi}_1(z_0) - w\tilde{\Phi}_2(z_0)]\tilde{\Phi}_2(z), & z \geqslant z_0\end{cases} \tag{4.82}$$

其中 Wronski 行列式

$$W(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2) \equiv \tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}'_2 - \tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}'_1 \tag{4.83}$$

应取 $z=z_0$ 时的值,而 w 在不同边界条件下具有不同定义:

$$w \equiv \begin{cases}\tilde{\Phi}_1(0)/\tilde{\Phi}_2, & \text{当 } \tilde{\Phi}(0) = 0 \\ \tilde{\Phi}'_1(0)/\tilde{\Phi}'_2, & \text{当 } \tilde{\Phi}'(0) = 0\end{cases} \tag{4.84}$$

4.6.2 简正波展开

现在来讨论 $\bar{\Phi}$ 在 $s\to\infty$时的渐近行为。由于这种渐近行为确定出 Φ 的初始行为,所以在脉冲衍射理论中特别有意义。这时的场可以表示为各阶简正波之叠加。

按照 Langer[②],与(4.80)式相对应的齐次方程在 s 很大时有两个线性独立渐近解:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_1 &\sim PQ^{1/2}q^{-1/4}H_{1/3}^{(1)}(Q) \\ \tilde{\Phi}_2 &\sim PQ^{1/2}q^{-1/4}H_{1/3}^{(2)}(Q)\end{aligned} \tag{4.85}$$

其中

$$P \equiv \left[\frac{\rho(z)}{\rho(z_1)}\right]^{1/2}, \quad Q \equiv \int_{z_1}^{z} q^{1/2}(z')\mathrm{d}z' \tag{4.86}$$

z_1 为 q 的一个一阶零点,H 是 Hankel 函数。

为了计算 $\tilde{\Phi}$ 的逆 Fourier 变换 $\bar{\Phi}$,引进极坐标 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi; \kappa_x=\kappa\cos\theta$, $\kappa_y=\kappa\sin\theta$。于是

$$\bar{\Phi}(r,\varphi,z;s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\tilde{\Phi}(z;s,\kappa,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa r\cos(\theta-\varphi)}\kappa\mathrm{d}\kappa \tag{4.87}$$

当 $kr\gg1$ 时,对 θ 的积分可用稳相法[③]来完成。结果得到

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(r,\varphi,z;s) = &\frac{1}{(2\pi)^{3/2}r^{1/2}}\left[\int_0^{\infty}\tilde{\Phi}(\varphi,z;s,\kappa)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\kappa r-\frac{\pi}{4}\right)}\kappa^{1/2}\mathrm{d}\kappa\right. \\ &\left.+\int_0^{\infty}\tilde{\Phi}(\varphi+\pi,z;s,\kappa)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\kappa r-\frac{\pi}{4}\right)}\kappa^{1/2}\mathrm{d}\kappa\right] + O(\kappa r)^{-1}\end{aligned} \tag{4.88}$$

---

① 为简短起见,我们此后往往只写出 $\tilde{\Phi}$ 等多元函数的一个关键性自变量 z。

② 参阅 Langer R. E. Trans. Amer. Math. Soc., 1931, 33, 23~64; 或 Lighthill, M. J., Quart. J. Mech. Appl. Math., 1950, 3: 311。

③ 参阅 Jeffereys H., B. S., Methods of Mathematical Physics, 3rd ed., Cambridge, 1956。

在上式第一个积分沿 κ 正实半轴的积分路径上，补充一个循逆时针方向扫过 κ 平面第一象限的、半径无限大的圆弧和逆向的正虚半轴；面在第二个积分的同一积分路径上，补充一个循顺时针方向扫过第四象限的半径无限大的圆弧和顺向的负虚半轴。利用(4.82)式、(4.84)式和(4.85)式以及 Hankel 函数的渐近表式

$$H_{1/3}^{(1),(2)}(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{\pm i\left(x-\frac{5}{12}\pi\right)} \tag{4.89}$$

可证明 $\lim\limits_{|\kappa|\to\infty} \tilde{\Phi}\kappa^{1/2} \to 0$，于是从 Jordan 引理得出：沿半径无限大的两个四分之一圆周的积分分别消失。其次，用直接代入可以看出，(4.88)式中两个被积函数在正、负虚半轴上的值相等而异号，因此恰好相互抵消。最后，沿被积函数支点割线边岸的积分通常给出振幅与 κr^2 成反比的侧面波[35]，而在我们这里所要求的近似程度下可以忽略不计。

于是，(45.88)式中两个沿 κ 实半轴的积分就化为分别展布在第一和第四象限中的两个回路积分，而可用留数定理来计算。从物理上的考虑可以肯定：被积函数在第四象限中应当没有极点，因而(4.88)式中第二个积分的值应当等于 0，否则这个积分将给出一列向源点会聚的波，面这是违背我们问题的物理本质的，在下一小节中将对此作出证明；同时还将看到，被积函数有无穷多个一阶极点 $\kappa=\kappa_n(n=1,2,3,\cdots)$分布在第一象限中或实轴上。如将(4.88)式中的积分路径取得恰好在实轴之下并平行于实轴，那么在构成回路时第二个积分总是等于 0，而 $\bar{\Phi}$ 仅由第一个积分的值给出，根据求留数的著名法则我们得到

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(r,\varphi,z;s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\Phi}_n(r,\varphi,z;s)\\ &= i2(2\pi)^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\kappa_n}{r}\right)^{1/2}\frac{\chi_n}{W}\tilde{\Phi}_2(\varphi,z_0;s,\kappa_n)\\ &\quad\cdot\tilde{\Phi}_2(\varphi,z;s,\kappa_n)e^{i\left(\kappa_n r-\frac{\pi}{4}\right)}+O(kr)^{-1}\end{aligned} \tag{4.90}$$

其中

$$\chi_n \equiv \begin{cases}\dfrac{\tilde{\Phi}_1(\varphi,0;s,\kappa_n)}{\partial_\kappa\tilde{\Phi}_2(\varphi,0;s,\kappa_n)|_{\kappa=\kappa_n}}, \text{当 } \tilde{\Phi}(0)=0\\[2ex] \dfrac{\tilde{\Phi}'_1(\varphi,0;s,\kappa_n)}{\partial_\kappa\tilde{\Phi}'_2(\varphi,0;s,\kappa)|_{\kappa=\kappa_n}}, \text{当 } \tilde{\Phi}'(0)=0\end{cases} \tag{4.91}$$

表达式(4.90)对于区域 $z\leqslant z_0$ 和 $z\geqslant z_0$ 都成立。

4.6.3　本征值的渐近表式

由(4.82)式和(4.84)式可看出，对于软界面，$\tilde{\Phi}$ 的极点就是 $\tilde{\Phi}_2(0)$的零点，而按照(4.85)式，后者近似地就是 $H_{1/3}^{(2)}(Q_0)$的零点，这里

$$Q_0 \equiv Q(0) = \int_{z_1}^{0} q^{1/2}\mathrm{d}z = \int_{0}^{q_0} \frac{q^{1/2}}{q'}\mathrm{d}q \tag{4.92}$$

此后就用下标 0 来表示取 $z=0$ 时的值。从熟知的关系式

$$H_{1/3}^{(2)}(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}) = \frac{2}{3^{1/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}[J_{1/3}(x) + J_{-1/3}(x)] \tag{4.93}$$

可以看出，$H_{1/3}^{(2)}(Q_0)$的零点可记作

$$Q_{0n} = \beta_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \tag{4.94}$$

其中 β_n 为满足下列关系的正实数

$$J_{1/3}(\beta_n) + J_{-1/3}(\beta_n) = 0 \tag{4.95}$$

将 $q(z)$和 $q'(z)$分别展开成 Maclaurin 级数并从中消去 z，把由此得到的 q'的表式代入(4.92)并完成积分后有[109]

$$Q_0 = \frac{2}{3}\frac{q_0^{3/2}}{q_0'}\left[1 + \frac{2}{5}\frac{q_0 q_0''}{q_0'^2} + \cdots\right] \tag{4.96}$$

在通常情形下总是有 $M_0 = v_0/c_0 = 0$，所以从(4.81)式得

$$q_0 = -\frac{s^2}{c_0^2} - \kappa^2 \tag{4.97}$$

$$q_0' = 2\frac{s}{c_0}\left[\frac{s}{c_0}\frac{c_0'}{c_0} - \mathrm{i}\kappa M_0'\cos\varphi\right] \tag{4.98}$$

不难证明，(4.95)式中的第二项和以后所有各项的量级均不超过 $O(s^{-2/3})$，因此当 $s\to\infty$时可以只取第一项。于是，从(4.94)式、(4.96)式和(4.97)式得到

$$\kappa_n = \frac{\mathrm{i}s}{c_0} + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{3}{2}\beta_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}q_0'\right)^{2/3}\left(\frac{s}{c_0}\right)^{-1} + O(s^{-1/3})$$

在零级近似下 $\kappa_n \sim \frac{\mathrm{i}s}{c_0}$，以之代入(4.98)式，同时引进函数

$$f(z) \equiv (c + v\cos\varphi)^{-2} \tag{4.99}$$

我们就得到

$$q_0' \sim -s^2 f_0'$$

于是

$$\kappa_n = \mathrm{i}f_0^{1/2}s + \frac{\mathrm{i}}{2}\alpha_n f_0^{-1/2} f_0'^{2/3} s^{1/3} + O(s^{-1/3}) \tag{4.100}$$

其中

$$\alpha_n \equiv \left(\frac{3}{2}\beta_n\right)^{2/3} \tag{4.101}$$

由于总是有 $\mathrm{Re}s>0$，$f>0$，所以从(4.100)式显而易见 $\kappa=\kappa_n$ 不可能位于下半平面，因而在第三、第四象限中没有 $\tilde{\Phi}$ 的极点；又由于积分(4.88)式是在右半平面内进行的，因此只需考虑 $\tilde{\Phi}$ 在第一象限内或实半轴上的极点就够了。由此证明了我们在上一小节中所做的分析是正确的。

代换(4.101)式的意义可从下述考虑得到阐明。将 Airy 函数与 Bessel 函数的关系式[110]

$$Ai(-\alpha)=\frac{1}{3}\alpha^{1/2}[J_{1/3}(\beta)+J_{-1/3}(\beta)]$$

同(4.95)式比较即可看出,β_n 可用 $Ai(-\alpha)$ 的零点 α_n 来代替。公式(4.100)是对软界面情形写出的,如是硬界面,则 κ_n 近似地为 $\dot{H}_{1/3}^{(2)}(Q_0)$(上加一点表示函数对其宗量的全微商)的零点(形式上相应地记为 $\dot{Q}_{0n}=\dot{\beta}_n e^{i\pi}$)所规定,因商 α_n 应相应地换为 $\dot{A}i(-\alpha)$ 的零点 $\dot{\alpha}_n$。

4.6.4　本征函数的渐近表式

将(4.81)式改写为

$$q=s^2(1-M^2\cos^2\varphi)(\mu-f^{1/2})\left(\mu+\frac{1}{c-v\cos\varphi}\right) \tag{4.102}$$

其中

$$\mu=\frac{\kappa}{is}=f_0^{1/2}+\frac{1}{2}\alpha f_0^{-1/2}f_0'^{2/3}s^{-2/3}+O(s^{-4/3}) \tag{4.103}$$

如取实际中常见的情形 $c_0'+v_0'\cos\varphi<0$①,则有

$$f_0'>0$$

按定义,(4.90)式所给出的 Φ 乃是 $t<0$ 时等于 0 的某函数 Φ 的 Laplace 变换,因此它应当是在半平面 $\mathrm{Re}s>C$(C 为某正实常数)内的解析函数;并且它在 s 取正实数时的值唯一地确定出其逆变换 Φ,因此为简单起见,可以暂时取 s 为一正实数,从而 $\mu\geqslant f_0^{1/2}=1/c_0$。

由于 f 是一正实函数,故形成影区的条件就说明 f 是 z 的单调增长函数,而 q 只有一个唯一的一阶零点 $z=z_1$。由于(4.102)式中第一、第三两个括号都不可能等于 0,所以唯一的可能是

$$\mu=f^{1/2}(z_1) \tag{4.104}$$

当 $z<z_1$ 时,$\mu>f^{\frac{1}{2}}$,当 $z>z_1$ 时,$\mu<f^{1/2}$。因此可以定义 z 的一个实函数如下:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}(-\zeta)^{3/2}&=\int_z^{z_1}\left[(1-M^2\cos^2\varphi)(\mu-f^{1/2})\left(\mu+\frac{1}{c-v\cos\varphi}\right)\right]^{1/2}dz',\ z\leqslant z_1\\ \frac{2}{3}\zeta^{3/2}&=\int_{z_1}^{z}\left[(1-M^2\cos^2\varphi)(f^{1/2}-\mu)\left(\mu+\frac{1}{c-v\cos\varphi}\right)\right]^{1/2}dz',\ z\geqslant z_1\end{aligned} \tag{4.105}$$

---

① 根据第 3 章第 2 节中的讨论不难看出,这正是形成影区的条件。详细证明参阅文献[107]中的附录。

将(4.105)式与(4.86)式中第二式(其中的 q 以(4.106)式代入)比较,即可看出①

$$Q = -\mathrm{i}\,\frac{2}{3}s\zeta^{3/2} \tag{4.106}$$

按照(4.93)式,我们有

$$H_{1/3}^{(2)}(Q) = \frac{3}{3^{1/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}s\zeta^{3/2}\right) - I_{1/3}\left(\frac{2}{3}s\zeta^{3/2}\right)\right]$$

考虑到关系式

$$Ai(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^{1/2}\left[I_{-1/3}(\beta) - I_{1/3}(\beta)\right]$$

便可将(4.85)式中 $\widetilde{\Phi}_2$ 的表式化为

$$\widetilde{\Phi}_2 \sim 2^{3/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\zeta^{-1/3}Ai(s^{2/3}\zeta)P \tag{4.107}$$

由 Airy 函数的展开式[111]

$$Ai(\alpha) = \frac{1}{2}\pi^{-1/2}\alpha^{-1/4}\mathrm{e}^{-\beta}\left[1 - \frac{3\cdot 5}{1!216}\beta^{-1} - \frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2!216^2}\beta^{-2} - \cdots\right] \tag{4.108}$$

看出,当 $s\to\infty$时,$Ai(s^{2/3}\zeta_0)$按规律 $s^{-1/6}\mathrm{e}^{-s}$趋于0,因此当 s 很大时,应将 $s^{2/3}\zeta_0$ 取得靠近 Airy 函数的零点 $\alpha = -\alpha_n$ 中的某一个:

$$\zeta_0 \sim -\alpha_n s^{-2/3} \tag{4.109}$$

从而可求出

$$\zeta_0' \sim f_0^{1/3}, \quad \zeta_0'' \sim \frac{v_0'\cos\varphi}{2c_0}f_0^{1/3} \tag{4.110}$$

均为有限的量,于是(4.107)式给出②

$$\widetilde{\Phi}_2(0) \sim 2^{3/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}f_0^{-1/6}s^{-1/3}Ai(-\alpha_n)P_0 \tag{4.111}$$

同时

$$\widetilde{\Phi}'_2(0) \sim 2^{3/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}f_0^{1/6}s^{1/3}\dot{A}i(-\dot{\alpha}_n)P_0 \tag{4.112}$$

从以上二式分别得到

$$\partial_\kappa\widetilde{\Phi}_2(0)\,|_{\kappa=\kappa_n} \sim 2^{5/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}f_0^{1/2}f_0'^{-5/6}s^{-2/3}\dot{A}i(-\alpha_n)P_0 \tag{4.113}$$

$$\partial_\kappa\widetilde{\Phi}'_2(0)\,|_{\kappa=\kappa_n} \sim 2^{5/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}f_0^{1/2}f_0'^{-1/2}\dot{\alpha}_n Ai(-\dot{\alpha}_n)P_0 \tag{4.114}$$

至于 $\widetilde{\Phi}_1$,我们仍取(4.58)式中的形式,将(4.102)式和(4.106)式代入,便得

$$\widetilde{\Phi}_1 \sim \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\zeta^{1/2}\zeta'^{-1/2}H_{1/3}^{(1)}\left(-\mathrm{i}\,\frac{2}{3}s\zeta^{3/2}\right)P \tag{4.115}$$

---

① 在两种可能的符号中必须取负号,因为如取正号,则从(4.82)式和(4.85)式得到 $\widetilde{\Phi}\sim q^{-1/4}\exp\left[\frac{2}{3}s\zeta^{3/2}\right]$(当 $z\to\infty$),$\widetilde{\Phi}$ 的这一形式不满足辐射条件。

② 在其中略去了量级为 $O(s^{-1/3})$的项。取 $\widetilde{\Phi}_2$ 或 $\widetilde{\Phi}_1$ 对 z 的微商以求 $\widetilde{\Phi}'_2(0)$或 $\widetilde{\Phi}'_1(0)$的值即意味着相应的边界条件是 $\widetilde{\Phi}(0)=0$。前已指出,这时应作如下代换:$\beta_n\to\dot{\beta}_n, \alpha_n\to\dot{\alpha}_n$。

考虑到(4.109)式、(4.110)式和(4.111)式，我们有

$$\tilde{\Phi}_1 \sim \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} e^{i\pi/2} \alpha_n^{1/2} f_0^{-1/6} s^{-1/3} H_{1/3}^{(1)}(-\beta_n) P_0 \tag{4.116}$$

取(4.115)式对 z 的微商，代入有关各值，并略去量级为 $O(s^{-1/3})$ 的项，便得到

$$\tilde{\Phi}'_1(0) \sim \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} e^{i\pi/2} \dot{\alpha}_n f_0^{1/6} s^{1/3} H_{-2/3}^{(1)}(-\dot{\beta}_n) P_0 \tag{4.117}$$

分别以(4.113)式、(4.116)式和(4.114)式、(4.117)式代入(4.91)式，求出

$$\chi_n \sim \frac{1}{4 \cdot 3^{1/2}} f_0^{-1/2} f_0'^{2/3} s^{1/3} \begin{cases} e^{-i\pi/6} \varepsilon_n, \text{当 } \tilde{\Phi}(0) = 0 \\ e^{i\pi/6} \dot{\varepsilon}_n, \text{当 } \tilde{\Phi}'(0) = 0 \end{cases} \tag{4.118}$$

其中

$$\varepsilon_n \equiv \alpha_n^{1/2} \frac{H_{1/3}^{(1)}-(\beta)}{\dot{A}i(-\alpha_n)}, \quad \dot{\varepsilon}_n \equiv \frac{H_{-2/3}^{(1)}(-\dot{\beta}_n)}{Ai(-\dot{\alpha}_n)} \tag{4.119}$$

将 Φ_2 的表式(4.107)作进一步变换。将(4.104)式展成 z_1 的幂级数，同(4.103)式比较即可看出 $z_1 = O(s^{-2/3})$，因此，对于某个固定的 $z(\neq 0)$，当 s 很大时，就可把(4.107)式中的 ζ 看成即由(4.105)中第二式所定义，并将积分下限取为0；将被积函数展开并代入有关各值，便得到

$$\frac{2}{3}\zeta^{3/2} = |F(z)| - \frac{1}{2}\alpha_n f_0'^{2/3} s^{-2/3} G(z) + O(s^{-4/3}) \tag{4.120}$$

其中

$$F(z) \equiv \frac{1}{c_0}\int_0^z \frac{[(c_0 - v\cos\varphi)^2 - c^2]^{1/2}}{c} dz' \tag{4.121}$$

$$G(z) = c_0 \int_0^z \frac{c^2 + c_0 v\cos\varphi - v^2\cos^2\varphi}{c[(c_0 - v\cos\varphi)^2 - c^2]^{1/2}} dz' \tag{4.122}$$

当 s 大时 $s^{2/3}\zeta$ 亦大，因此(4.107)式中的 Airy 函数可用展开式(4.108)中的第一项来代替，于是

$$\tilde{\Phi}_2 \sim \left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{sF'}\right)^{1/2} P\exp\left[-sF + \frac{1}{2}\alpha_n f_0'^{2/3} s^{1/3} G + i\frac{\pi}{6} + O(s^{-1/3})\right] \tag{4.123}$$

利用(4.100)式可直接写出

$$\left(\frac{\kappa_n}{r}\right)^{1/2} e^{i\left(\kappa_n r - \frac{\pi}{4}\right)} = f_0^{1/4} s^{1/2} r^{-1/2} \exp\left[-f_0^{1/2} sr - \frac{1}{2}\alpha_n f_0^{-1/2} f_0'^{2/3} s^{1/3} r + O(s^{-1/3})\right]$$

$$\tag{4.124}$$

最后，将所有有关各式代入(4.83)式并考虑到关系式

$$W(H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}) \equiv H_\nu^{(1)}(x)\dot{H}_\nu^{(2)}(x) - \dot{H}_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{4i}{\pi x}$$

不难求得

$$W(\tilde{\Phi}_1,\tilde{\Phi}_2)=-\frac{4\mathrm{i}}{\pi}P^2 \tag{4.125}$$

4.6.5 衍场的近似表式

利用上节所得结果，可立即得到 $\bar{\Phi}$ 的渐近表式，以(4.118)式、(4.123)式～(4.125)式等有关表式代入(4.90)式中第 n 阶简正波的式中，即得

$$\bar{\Phi}_n=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/2}f_0^{2/3}s^{-1/6}\left[\frac{c_0\rho(z)}{\rho(z_0)F'(z_0)F'(z)r}\right]^{1/2}[1+O(s^{-1/3})]$$
$$\times\binom{\varepsilon_n}{\dot{\varepsilon}_n}\exp\left\{-s\tau-\frac{1}{2}f_0^{2/3}s^{1/3}\delta\binom{\alpha_n}{\dot{\alpha}_n}-\mathrm{i}\binom{5\pi/6}{\pi/2}\right\} \tag{4.126}$$

式中上面一行对应于软界面情形，而下面一行对应于硬界面情形；为简短起见，还引进了符号

$$\tau\equiv\frac{r}{c_0}+|F(z_0)|+|F(z)| \tag{4.127}$$

$$\delta\equiv c_0r-G(z_0)-G(z) \tag{4.128}$$

可以证明①：τ 就是脉冲到达观察点的时间，而 δ 就是表征观察点深入影区距离的一个量。(4.126)式不仅对于正实数的 s 成立，而且对于 $\mathrm{Re}s>0$ 的一切复数的 s 也成立。

$\bar{\Phi}$ 的展开式(4.90)仅当其收敛时才能给出逆 Laplace 变换 Φ，因 τ 恒为正，所以如果 $\delta>0$，则当 $\mathrm{Re}s\to\infty$ 时，(4.126)式给出 $\bar{\Phi}_n\to 0$。由此可见，在影区内级数(4.90)收敛。根据(4.126)式不难看出，当 $|\delta|\to\infty$ 时，n 阶简正波的主要项与一阶简正波的修正项之比值趋于 0；换句话说，一阶简正波的修正项远大于任一高阶简正波的主要项，因此在将(4.126)式代入(4.90)式时可以只保留 $n=1$ 的一项；于是

$$\bar{\Phi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/2}f_0^{2/3}s^{-1/6}\left[\frac{c_0\rho(z)}{\rho(z_0)F'(z_0)F'(z)r}\right]^{1/2}[1+O(s^{-1/3})]$$
$$\times\binom{\varepsilon_1}{\dot{\varepsilon}_1}\exp\left\{-s\tau-\frac{1}{2}f_0^{2/3}s^{1/3}\delta\binom{\alpha_1}{\dot{\alpha}_1}-\mathrm{i}\binom{5\pi/6}{\pi/2}\right\},\quad z_0>0,z>0 \tag{4.129}$$

上式实际上只对 $z_0>0$ 并且 $z>0$ 的情形成立，因为如果 z_0 和 z 之中有一个等于 0，那么根据(4.129)式，就会出现无穷大的因子 $F_0'^{-1/2}$。这时(4.129)式必须加以修正。

先讨论硬界面情形。设 $z_0>0$ 而 $z=0$，这时为了得到 $\bar{\Phi}$，应以 $\tilde{\Phi}_2(0)$ 的表式(4.111)(正像曾指出过的那样，这时应在其中用 $\dot{\alpha}_1$ 代替 α_1)来代替 $\tilde{\Phi}_2(z)$ 的表式(4.123)。因而代替(4.129)式我们有

---

① 参阅文献[107]的附录。

$$\bar{\Phi}_0 = \frac{\pi}{6^{1/2}} f_0'^{1/2} \left[\frac{c_0 \rho_0}{\rho(z_0) F'(z_0) r}\right]^{1/2} H_{-2/3}^{(1)}(-\dot{\beta}_1)[1+O(s^{-1/3})]$$
$$\times \exp\left\{-s\tau_0 - \frac{1}{2} f_0'^{2/3} s^{1/3} \delta_0 \dot{\alpha}_1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right\}, \quad z_0 > 0, z = 0 \tag{4.129a}$$

如是相反情形：$z_0=0$ 而 $z>0$，则只需在上式中作代换：$z_0 \to z, \rho_0/\rho(z_0) \to \rho(z)/\rho_0$。如果 z_0 和 z 同时为 0，则只需在上式中再进行一次相应于(4.123)式→(4.111)式的代换就行了，这时我们有

$$\bar{\Phi}_{00'} = \pi\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2} f_0'^{1/3} s^{1/6} \left(\frac{c_0}{r}\right)^{1/2} Ai(-\dot{\alpha}_1) H_{-2/3}^{(1)}(-\dot{\beta}_1)[1+O(s^{-1/3})]$$
$$\times \exp\left\{-s\tau_{00'} - \frac{1}{2} f_0'^{2/3} s^{1/3} \delta_{00'} \dot{\alpha}_1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right\}, \quad z_0 = z = 0 \tag{4.129b}$$

其中第一个下标 0，一如既往，对应于 $z=0$，而第二个下标 $0'$ 对应于 $z_0=0$。

至于软界面情形，那么，如果 $z_0>0$ 而 $z=0$，则由边界条件本身就得出 $\bar{\Phi}_0=0$；如果 $z_0=0$ 而 $z>0$，则同样得到 $\Phi_{(z)}=0$，因为这时代换(4.123)→(4.111)对于每一 $\bar{\Phi}_n$ 都给出一等于 0 的因子 $Ai(-\alpha_n)$。

现在可以来求 $\bar{\Phi}$ 的逆 Laplace 变换 Φ：

$$\Phi(v,\varphi,z;t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \bar{\Phi}(v,\varphi,z;s) \mathrm{e}^{st} \mathrm{d}s, c > 0$$

以 $\bar{\Phi}$ 的各种情形下的表达式(4.129)～(4.129b)代入，可见我们需要计算的积分具有如下形式：

$$I_k(\Upsilon, T) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} s^{-k} \exp\{Ts - \Upsilon s^{1/3}\} \mathrm{d}s \tag{4.130}$$

其中 k 在不同情形下分别取值 1/6，0，−1/6；而

$$\Upsilon \equiv \frac{1}{2} f_0'^{2/3} \delta \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dot{\alpha}_1 \end{pmatrix} > 0 \tag{4.131}$$

$$T \equiv t - \tau \tag{4.132}$$

当 $T<0$ 时可证明积分(4.130)式等于 0，而当 $T\geqslant 0$ 时，可用越过法来估值，结果得到[108]

$$I_k = \frac{3^{(6k-1)/4}}{2\pi^{1/2}} \Upsilon^{(3-6k)/4} T^{(6k-5)/4} U(T) \left[1 + O\left(\frac{T^{1/2}}{\Upsilon^{3/2}}\right)\right] \exp\left\{-\frac{2}{3^{3/2}} \frac{\Upsilon^{3/2}}{T^{1/2}}\right\} \tag{4.133}$$

其中 $U(T)$ 代表 Heaviside 单位函数。

利用(4.133)式，计入 α_1、$\dot{\alpha}_1$ 和 $\dot{A}i(-\alpha_1)$、$Ai(-\dot{\alpha}_1)$ 等的值，并求出相应的 β_1、$\dot{\beta}_1$ 和 $H_{1/3}^{(1)}(-\beta_1)$、$H_{-2/3}^{(1)}(-\dot{\beta}_1)$ 等的值，再引进符号

$$D \equiv \left(\frac{\rho}{F'r}\right)^{1/2} \tag{4.134}$$

之后，对于充分大的 δ 和充分小的 T，我们就得到衍射场的近似表式：

(1)硬界面情形

$$\Phi \sim \mathrm{i}0.0797 f'_0 \delta^{1/2} \frac{(c_0 r)^{1/2}}{\rho(z_0)} D(z_0) D(z) \frac{U(T)}{T} \exp\left\{-0.140 f'_0 \frac{\delta^{3/2}}{T^{1/2}}\right\}, z_0 > 0, z > 0 \tag{4.135}$$

$$\Phi_0 \sim \mathrm{i}0.0967 f'_0 \delta^{3/4} \frac{(\rho_0 c_0)^{1/2}}{\rho(z_0)} D(z_0) \frac{U(T)}{T_0^{5/4}} \exp\left\{-0.140 f'_0 \frac{\delta^{3/2}}{T_0^{1/2}}\right\}, z_0 > 0, z = 0 \tag{4.135a}$$

$$\Phi_{0'} \sim \mathrm{i}0.0967 f'_0 \delta_{0'}^{3/4} \left(\frac{c_0}{\rho_0}\right)^{1/2} D(z) \frac{U(T_{0'})}{T_{0'}^{5/4}} \exp\left\{-0.140 f'_0 \frac{\delta_{0'}^{3/2}}{T_{0'}^{1/2}}\right\}, z_0 = 0, \quad z > 0 \tag{4.135b}$$

$$\Phi_{00'} \sim \mathrm{i}0.1180 f'_0 \delta_{00'} \left(\frac{c_0}{r}\right)^{1/2} \frac{U(T_{00'})}{T_{00'}^{3/2}} \exp\left\{-0.140 f'_0 \frac{\delta_{00'}^{3/2}}{T_{00'}^{1/2}}\right\}, \quad z_0 = 0, z = 0 \tag{4.135c}$$

(2)软界面情形

$$\Phi \sim \mathrm{i}0.1237 f'_0 \delta^{1/2} \frac{(c_0 r)^{1/2}}{\rho(z_0)} D(z_0) D(z) \frac{U(T)}{T} \exp\left\{-0.486 f'_0 \frac{\delta^{3/2}}{T_0^{1/2}}\right\}, \quad z_0 > 0, z > 0 \tag{4.136}$$

$$\Phi_0 = \Phi_{0'} = \Phi_{00'} = 0, z_0 = 0 \;\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{或}}{\text{和}}\; z = 0 \tag{4.136a}$$

4.6.6　分析和结论

从以上所得到的衍射场表式不难证实：在衍射波前 $T=0$ 上，Φ 及其所有各阶时间微商均等于 0，这意味着：从脉冲到达时刻起，场随时间的增长比 T 的任何次幂都来得慢。由于场的上述各表式只适用于 δ 充分大的情形，因此以上结论也只对这一范围是正确的。在影区边沿附近，场的建立过程应当比较快，可是对于这一区域内的场，至今缺乏适当的处理方法。

从(4.135)式易见，当 $T=0$ 和 $T\to\infty$ 时场均为 0，而当 $T=T^{\max}$ 时场达到极大值 $\Phi^{\max}$，用这种方法可将"归一化"的场写为

$$\frac{\Phi}{\Phi^{\max}} = \left(\frac{T^{\max}}{T}\right) \exp\left\{2\left[1-\left(\frac{T^{\max}}{T}\right)^{1/2}\right]\right\} \tag{4.137}$$

其中

$$T^{\max} = 0.0049 f'^2_0 \delta^3 \tag{4.138}$$

可见 $T^{\max}$ 与 δ 的 3 次方成正比，因此随着深入影区距离的增大，场的建立过程急剧变慢。

类似地，可将场的其余各表式分别写成

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_0^{\max}}=\left(\frac{T_0^{\max}}{T_0}\right)^{5/4}\exp\left\{\frac{5}{2}\left[1-\left(\frac{T_0^{\max}}{T_0}\right)^{1/2}\right]\right\} \tag{4.137a}$$

$$\frac{\Phi_{00'}}{\Phi_{00'}^{\max}}=\left(\frac{T_{00'}^{\max}}{T_{00'}}\right)^{3/2}\exp\left\{3\left[1-\left(\frac{T_{00'}^{\max}}{T_{00'}}\right)^{1/2}\right]\right\} \tag{4.137b}$$

其中 $T_0^{\max}$ 和 $T_{00'}^{\max}$ 分别表示 Φ_0（或 $\Phi_{0'}$）和 $\Phi_{00'}$ 达到极大值时的 T 值；并且

$$\frac{T_0^{\max}}{T^{\max}}=\left(\frac{4}{5}\right)^2=0.640$$

$$\frac{T_{00'}^{\max}}{T^{\max}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\sim 0.444$$

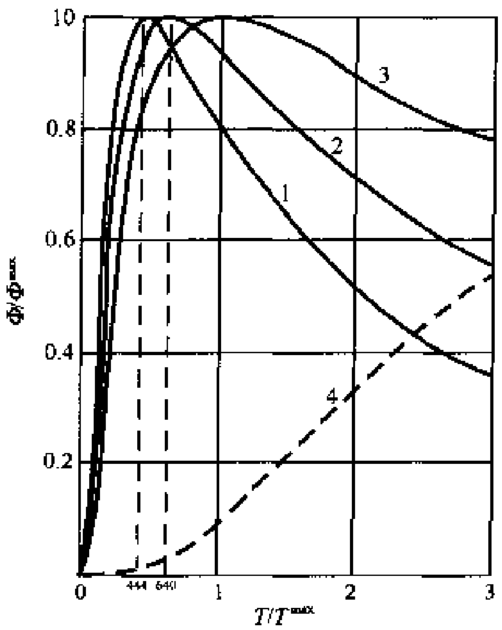


图 33　有风大气影区内脉冲衍射场的建立过程

硬界面情形：$z_0=0$ 且 $z=0$（曲线 1）；$z_0=0$ 或 $z=0$（曲线 2）；$z_0>0$ 且 $z>0$（曲线 3）；软界面情形：$z_0>0$ 且 $z>0$（曲线 4）

如将(4.136)式改写成(4.137)式的形式，则应将其中的 $T^{\max}$ 换为 $T_{(软)}^{\max}$（为便于对比，这时可将(4.137)式中的 $T^{\max}$ 记作 $T_{(硬)}^{\max}$），且有

$$\frac{T_{(软)}^{\max}}{T_{(硬)}^{\max}}\sim 12.05 \tag{4.138a}$$

由上述可见，在硬界面情形，Φ_0（或 $\Phi_{0'}$）的建立过程比 Φ 快，而 $\Phi_{00'}$ 则更快；另一方面，软界面情形下场的建立过程比硬界面情形缓慢得多。图 33 上示出各种情形下 $\Phi/\Phi^{\max}$ 对 $T/T^{\max}$ 的依赖关系。由于 $T/T^{\max}$ 都是坐标的函数，依赖于大气具体情况，因此场的实际图像在空间每点各不相同，这正说明了脉冲在传播过程中产生畸变，但是图 33 上所表示的“相对”建立过程却并不因地面异。

现在来研究 $\Phi^{\max}$ 的空间分布情形。可以证明①，$\frac{1}{c_0}G(z_0)\equiv r_1$ 是影区边沿到坐标原点的距离而 $\frac{1}{c_0}G(z)\equiv\lambda$ 是观察点到衍射线足的水平距离。于是，按照公式(4.128)

$$\delta=c_0(r-r_1-\lambda) \tag{4.128$'$}$$

① 参阅文献[107]中附录。

将(4.128′)式以及(4.138)式代入(4.135)式便得到

$$\Phi^{\max}=\mathrm{i}K^{1/2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-1/2}\left(\frac{r}{r_1}-1-\frac{\lambda}{r_1}\right)^{-5/2} \tag{4.139}$$

其中

$$K^{1/2}\equiv\frac{2.2}{c_0^2 f_0'}\left[\frac{\rho(z)}{\rho(z_0)F'(z_0)F'(z)}\right]^{1/2}r_1^{-3} \tag{4.140}$$

类似地可以求得

$$\Phi_0^{\max}=\mathrm{i}K_0^{1/2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-1/2}\left(\frac{r}{r_1}-1\right)^{-3} \tag{4.139a}$$

$$K_0^{1/2}\equiv\frac{10.7}{c_0^{5/2}f_0^{3/2}}\left[\frac{1}{\rho(z_0)F'(z_0)}\right]^{1/2}r_1^{-7/2} \tag{4.140a}$$

$$\Phi_{0'}^{\max}=\mathrm{i}K_0^{1/2}[\rho(z_0)\rho(z)]^{1/2}r^{-1/2}(r-\lambda)^{-3} \tag{4.139b}$$

$$\Phi_{00'}^{\max}=\mathrm{i}\,\frac{57.8}{c_0^3 f_0^{7/2}}r^{-4} \tag{4.139c}$$

这样，我们就把场对 r 的依赖关系单独分出，而使在一定的 φ，z 和 z_0 值下来研究声强随水平距离的普遍下降规律成为可能。作为例子，在图 34 上作出了 $z_0\neq0$时这种规律的图示。纵轴代表的是 $10\lg|\Phi^{\max}|^2$，即声强的 dB 值；计算 dB 的零声级是任意选取的，相当于确定 $\Phi^{\max}$时不计常数乘子，横轴代表的无量纲量 r/r_1 是观察点深入影区距离的一种恰当量度，参量 λ/r_1 反映出观察点所处高度对水平衰减规律的影响，我们看到，随着向影区内的深入，声强急剧下降；一般说来，λ/r_1 的值愈大下降愈迅速。

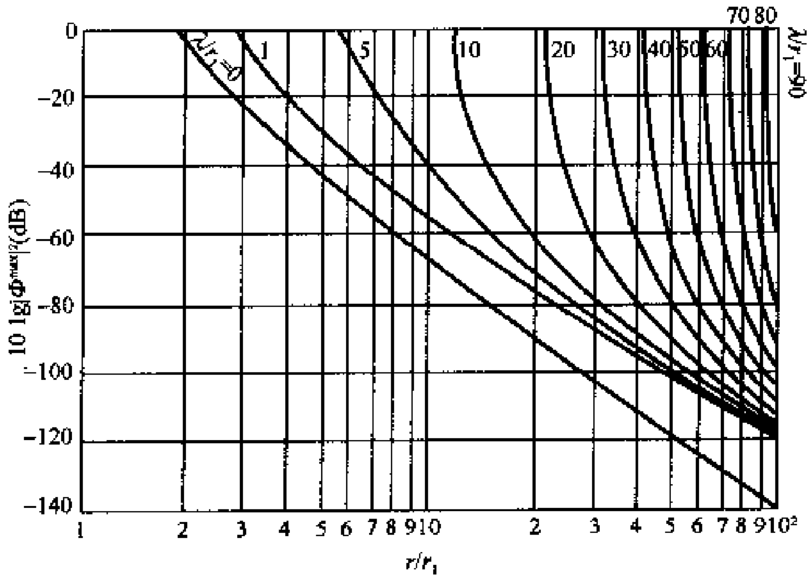


图 34　影区中衍射声强随水平距离的下降规律

如利用(4.138)式和(4.138a)式由(4.136)式导出软界面情形下 Φ^{max} 的表式，则得到同(4.139)式完全一样的公式只不过其中的 K 应换为 $K_{(软)}$ 并且

$$K_{(软)} \sim 0.0166K_{(硬)}$$

由此可见，二者的下降规律完全一致，但绝对值仅为硬界面的1/60，即低17.8dB左右。声强对 φ 和 z 的依赖关系取决于大气具体情况，对一简单例子所作分析表明，这种关系弱于对 r 的依赖关系。

第 5 章　大气中的声吸收

一定能量的声波在大气中的传播自然不可能永无休止地进行下去，而会随传播距离逐渐衰减，表现为声强的减弱。这首先是由于球面扩展，声波本身单位面积的能流降低；其次是由于反射、折射、散射等声波改变其传播路径而使其能量偏离原来预期的范围。上述两类统称为“几何衰减”，只涉及声能的重新分布而不涉及能量的转换。另一种类型的衰减则涉及介质对声波能量的吸收，这时与分子有序运动能相关联的声能转换为与无规热躁动相关联的热能。

大气对声波的吸收过程主要包含两方面机制。一是大气的黏性和导热性对声波造成的“经典吸收”①：声波引起大气分子的振动，而黏性使其振动能量部分地消耗于分子之间的内摩擦；声波同时使大气某些部分受到压缩而变热，其他部分因膨胀而变冷，大气的导热性使其间的温差减小，这就相当于一部分声能转化为分子的无规热运动。

第二种损耗机制是由大气分子的双原子结构引起的：能量从声波的集总运动（分子的平动）转移到分子内自由度（转动和振动）为一不可逆过程，由于声压只决定于分子的平动，所以这种能量转移就导致声能的衰减，分子平动能向内能的转换需要一定的时间，是一种弛豫过程，所以这种吸收机制被称为“分子吸收”或“弛豫吸收”。

对声吸收的全面计算不仅应包括这两种单独机制本身的贡献，还应包括它们之间的相互依赖关系，例如，分子弛豫过程对经典吸收机制的影响。幸运的是，理论（对 Boltzmann 方程逐次求近似解[112]）和实验（低压下的测量[113]）都证实：在低于 10MHz 的频率下，经典吸收和分子吸收二者是可叠加的。

吸收效应可用一吸声系数 α 来表示，使得声压振幅与距离的关系为 $p(r)=p^0 e^{-\alpha r}$。α 的单位可以是 dB/m，但更常用的是 Np/m。综上所述，α 系由三部分叠加组成：$\alpha=\alpha_{cl}+\alpha_{rot}+\alpha_{vib}$，这里 α_{cl}，α_{rot} 和 α_{vib} 分别表示经典、转动和振动吸声系数。α_{vib} 系由大气各组成成分分子振动的贡献叠加而成，不过实验表明，其中占绝对优势的是 O_2 和 N_2 的贡献，因此

---

① 此名称之由来是因为：在经典物理学“黄金时代”的 19 世纪中叶，认为介质对声吸收仅仅是由切变黏性和导热性引起的。而 Duff 在 19 世纪末比较粗糙的测量中就已发现实际的声吸收远大于按 Stokes (1845) 和 Kirchhoff (1868) 的经典公式得出的计算值。（参见 Phys. Rev. 1900，11：65——这是有史以来第一篇公开发表的有关大气声吸收实验的论文。）

$$\alpha = \alpha_{cl} + \alpha_{rot} + \alpha_{vib,O} + \alpha_{vib,N} \tag{5.1}$$

尽管以下的讨论主要是针对100Hz～10MHz的频率范围，但实际上，直至10Hz的次声频，所有机制仍保证适用①。至于10Hz以下的次声，则辐射吸收的贡献可能会变得重要，但这方面至今仍缺乏系统研究，一些情况可参阅第6章。

5.1 经典吸收

5.1.1 黏性流体的运动方程——Navier-Stokes方程

当考虑到介质的黏性和导热时，流体动力学基本方程组(1.30)式～(1.32)式中只有连续性方程仍保持其形式不变，而其余两个方程都应加以修正。

在形式为(1.30b)式的Euler方程中，由(1.33)式所定义的动量流密度张量只描述了动量的可逆"宏观"转移，即它只与流体从一处移向另一处的动力学移动以及作用于流体中的压强有关。而流体的黏性表现于流体运动中还存在一种不可逆的"微观"转移，即动量从速度较大处向速度较小处的转移。

因此，黏性流体的运动方程可以很简单地得到，只需在"理想"动量流的表式(1.33)中补充对应于此种不可逆"黏性"动量流的一项，即将黏性流体中动量流密度张量写为[30]

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k \tag{5.2}$$

张量

$$\sigma_{ik} = p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

称为流体的应力张量(比较对(1.33)式的说明)，而σ'_{ik}称为黏性应力张量。

仅当流体各部分以不同速度做相对运动时，其黏性(内摩擦)才表现出来，因此σ'_{ik}依赖于速度的空间微商，只要速度梯度不是太大，就可认为只依赖于一阶微商$\partial_k v_i$，并可认为这种依赖关系是线性的。σ'_{ik}不仅当$v=\text{const}$时为0，而且当整个流体以角速度$\boldsymbol{\Omega}$做等速度旋转时(即当$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$时)也必须为0(因这时没有切应变从而不存在内摩擦)，符合这一条件的线性组合为对称组合$\partial_k v_i + \partial_i v_k$。但是在这种组合中还有像$\partial_l v_l \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{v}$这样的一些项应当排除，因为它们并不表示流体中的纯切变而只表示单位体积中流体量的出流率。以一种对称方式减去这些项，再引进相应的系数，就可将σ'_{ik}写成形式②

$$\sigma'_{ik} = \mu(\partial_k v_i + \partial_i v_k) - \frac{2}{3}\mu\delta_{ik}\partial_l v_l \tag{5.3}$$

---

① 本章主要参考文献[116]的主要作者H. E. Bass在与作者的私人通信中特别强调指出这一点。

② 在较老的文献中，还含有计入容积黏性系数η的项：$\eta\delta_{ik}\partial_l v_l$，由于$\eta$仅与分子转动能有关，故应在转动吸收中考虑为妥。但是，按照我们采用的机制，即使在转动吸收中也不引进容积黏性的概念。

其中 μ 为与速度梯度成正比的切变黏性系数。

将(5.2)式和(5.3)式代入(1.33)式的右端，再利用连续性方程，即可得到黏性流体运动方程最普遍的形式。一般说来，η 是压力和温度的函数，但在大多数情形下，这种变化并不显著而可以把它看成常数，这时我们就得到 Navier-Stokes 方程：

$$\rho(\partial_t v_i + v_k \partial_k v_i) = -\partial_i p + \partial_k \sigma'_{ik} = -\partial_i p + \mu \partial_k \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3}\delta_{ik}\partial_l v_l\right) \quad (5.4)$$

或者写成矢量形式

$$\rho[\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}] = -\nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \quad (5.4')$$

顺便指出，如流体可看成不可压缩的，则因 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$，上式即化为

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v}$$

其中 $\nu=\mu/\rho$ 为运动黏性系数，它比 η 更能说明流体的运动特性。

5.1.2 导热方程

适用于理想流体的能量守恒定律(1.36)在黏性流体中必须加以修正。这时的能流密度除了与单纯的质量转移有关的部分((1.36)式右端花括弧内的表式)以外，还需补充以与内摩擦过程有关的项和由导热性所引起的项。

由定义知，黏性应力张量 σ'_{ik} 也就是由黏性引起的动量流(作用于单位面积上的摩擦力)，它与速度的标积即给出能流，因此与黏性有关的能流密度就是 $v_i\sigma'_{ik}$。

由导热引起的能流是一种与流体的宏观运动无关的分子之间的能量转移——温度较高区域内运动速度较大的分子向温度较低的区域内扩散，最终使温度趋于平衡。

对于任何形式的扩散过程，流密度都正比于“浓度”的变化率。因此可以确定：热流密度 j_h 与温度梯度成正比

$$j_h = -\kappa\nabla T \quad (5.5)$$

其中比例常数 $\kappa(>0)$ 为导热系数，一般为温度和压力的函数，负号表明热流方向与温度梯度方向相反——热量是从高温区流向低温区。

综上所述，对照导出(1.36)式的讨论，适用于黏性、导热流体的能量守恒方程应为(Fourier-Kirchhoff-Neumann 能量方程)[30]

$$\partial_t\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) - v_i\sigma'_{ik} - \kappa\nabla T\right] \quad (5.6)$$

上式可变换为更便于应用的形式，为此，首先利用算符(1.29)和焓 w 的定义以及矢量分析中的有关公式，将上式改写为

$$D_t\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) + \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon + p\right]\nabla\cdot\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}\cdot\nabla p + \partial_k(v_i\sigma'_{ik}) + \nabla\cdot(\kappa\nabla T) \quad (5.7)$$

然后将左端展开并利用连续性方程(1.31)和热力学第二定律，即得

$$\rho D_t\left(\frac{v^2}{2}\right)+\rho TD_ts=-\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+\partial_k(v_i\sigma'_{ik})+\nabla\cdot(\kappa\nabla T)$$

取 $\boldsymbol{v}$ 与方程(5.5)的标积，我们得到

$$\rho D_t\left(\frac{v^2}{2}\right)=-\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+v_i\partial_k\sigma'_{ik}=-\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+\partial_k(v_i\sigma'_{ik})-\sigma'_{ik}\partial_k v_i$$

将最后两个方程相减，我们便得到热转移的普遍方程(Kirchhoff-Fourier 方程)：

$$\rho T(\partial_t s+\boldsymbol{v}\cdot\nabla s)=\sigma_{ik}\partial_k v_i+\nabla\cdot(\kappa\nabla T)\tag{5.8}$$

当黏性和导热都不存在时，该方程即退化为理想流体的绝热方程(1.35a)。(5.8)式具有非常明显的物理意义：其左端表示单位体积流体在单位时间内所得到的热量；右端第一项表示由于黏性而转变为热的那部分能量，第二项表示直接由导热带给该体积的热量。

5.1.3　黏性-导热流体中声波的能量关系

至此我们已得到描述黏性、导热流体中运动的三个方程，即连续性方程(1.31a)、Navier-Stokes 方程(5.4)和导热方程(5.8)。对于小振幅声波，(1.31a′)式重新化为(2.3)式，而另两个方程也可像以前做过的那样线性化为

$$\rho^0\partial_t\boldsymbol{v}=-\nabla p_1+\partial_k\sigma'_{ik}\tag{5.4a}$$

$$\rho^0T^0\partial_t s_1=\kappa\nabla^2T_1\tag{5.8a}$$

与以前不一样的是，我们用上标 0 来表示对应于未被扰动前的值，而将下标 0 保留用以表示某种参考值；下标 1(在 $\boldsymbol{v}$ 中照例略去)仍对应于受声波扰动后的值。这里与理想流体情形不同的是：由于在方程(5.8a)中引入了两个新变量 s_1 和 T_1，因此还须再补充两个方程，其中第一个显然可利用状态方程(但不同于(1.12)式，因现须考虑温度扰动)，另一个则是熵 s 的扰动与压力扰动和温度扰动之间的关系。这两个方程都可用偏微商的形式表出，利用热胀系数的定义

$$\beta=-\frac{1}{\rho}(\partial_T\rho)_p\tag{5.9}$$

和有关热力学关系，可以得到

$$\rho_1=(\partial_{p^0}\rho^0)_{s^0}p_1+(\partial_{s^0}\rho^0)_{p^0}s_1=\frac{1}{c^2}p_1-\left(\frac{\beta}{c_p}\rho^0T^0\right)s_1\tag{5.10}$$

$$T_1=(\partial_{p^0}T^0)_{s^0}p_1+(\partial_{s^0}T^0)_{p^0}s_1=\frac{\beta T^0}{c_p\rho^0}p_1+\frac{T^0}{c_p}s_1\tag{5.11}$$

首先来考虑这种损耗介质中声波的能量关系。为此将(5.4a)式点乘以 $\boldsymbol{v}$、将(2.3)式乘以 p_1/ρ^0 并将(5.8a)式乘以 T_1/T^0，然后将结果相加而得到

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho^0v^2\right)+\frac{p_1}{\rho^0}\partial_t\rho_1+\rho^0T_1\partial_t s_1=-\nabla\cdot(p_1\boldsymbol{v})+\partial_k v_i\sigma'_{ik}-\sigma'_{ik}\partial_k v_i$$

$$+\frac{\kappa}{T^0}\nabla\cdot(T_1\nabla T_1)-\frac{\kappa}{T^0}(\nabla T_1)^2 \tag{5.12}$$

利用(5.10)式和(5.11)式可将上式左端后二项之和写为$\partial_t\left[\frac{1}{2}\frac{p_1^2}{\rho^0 c^2}+\frac{1}{2}\frac{\rho^0 T^0}{c_p}s_1^2\right]$，而右端第三项可变换为

$$\sigma'_{ik}\partial_k v_i=\mu\partial_k v_i\left(\partial_k v_i+\partial_i v_k-\frac{2}{3}\delta_{ik}\partial_l v_l\right)=\frac{\mu}{2}\left(\partial_k v_i+\partial_i v_k-\frac{2}{3}\delta_{ik}\partial_l v_l\right)^2 \tag{5.13}$$

于是不难看出，(5.12)式的左端即表示声波能量的时间变化率$\partial_t E$，这里

$$E\equiv\frac{1}{2}\rho^0 v^2+\frac{1}{2}\frac{p_1^2}{\rho^0 c^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^0 T^0}{c_p}\right)s_1^2 \tag{2.17$'$}$$

可看成是所讨论情况下的声能密度。在不考虑黏性和导热性引起的不可逆过程时，熵扰动$s_1=0$，因此(2.17′)式就化为理想流体中的声能密度公式(2.17)。还可进一步引入声能流密度矢

$$\boldsymbol{I}=p_1\boldsymbol{v}-v_i\sigma'_{ik}-\frac{\kappa}{T^0}T_1\nabla T_1 \tag{5.14}$$

其中第二项和第三项分别为对应于黏性和导热性的声能流密度，它们理所当然地与$p\boldsymbol{v}$方向相反而导致声强降低。当不考虑这两项时就回到理想流体中的寻常声能流密度矢的表式(2.18)。

因此最后可将(5.12)式写成形式

$$\partial_t E+\nabla\cdot\boldsymbol{I}=-\mathscr{D} \tag{5.15}$$

其中

$$\mathscr{D}\equiv\frac{\mu}{2}\left(\partial_k v_i+\partial_i v_k-\frac{2}{3}\delta_{ik}\partial_l v_l\right)^2+\frac{\kappa}{T^0}(\nabla T_1)^2 \tag{5.16}$$

表示单位体积、单位时间内的能量损耗，(5.15)式实际上是声能守恒定律(其在理想流体中的形式是右端为0)在黏性、导热介质中的推广。其物理意义非常明显：左端第一项表示单位体积内声能的时间变化率，它必然等于声能通过该体积表面而流出的净通量(第二项移至右端)再加上消耗于内摩擦((5.16)式右端第一项)和导热(第二项)的能量。

5.1.4 黏性-导热流体中的吸声系数

现将上述结果应用于平面声波，其粒子速度可写为

$$v_x=\hat{v}\cos(kx-\omega t),\quad v_y=v_z=0$$

于是(5.16)式中的第一项成为

$$\frac{\mu}{2}\left\{\left[\left(1+1-\frac{2}{3}\right)\partial_x v_x\right]^2+\left[-\frac{2}{3}\partial_x v_x\right]^2+\left[-\frac{2}{3}\partial_x v_x\right]^2\right\}=\frac{4}{3}\mu(\partial_x v_x)^2$$

$$=\frac{4}{3}\mu k^2\hat{v}^2\sin^2(kx-\omega t)$$

现在我们关心的只是其时间平均值，即

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\mu\right)k^2\hat{v}^2$$

在进一步计算之前，必须先求出平面声波中温度扰动 T_1 与粒子速度 v 之间的关系，为此我们写出（在线性近似下）

$$T_1\approx(\partial_p T)_s p_1=-\frac{(\partial_p s)_T}{(\partial_T s)_p}$$

由热力学第二定律可直接写出

$$\mathrm{d}\left(\varepsilon-Ts+\frac{p}{\rho}\right)=-s\mathrm{d}T+\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p$$

这就意味着（Maxwell 关系）

$$(\partial_p s)_T=-\left(\partial_T\frac{1}{\rho}\right)_p=\rho^{-2}(\partial_T\rho)_p$$

因此

$$(\partial_p T)_s=\frac{-\rho^{-1}(\partial_T\rho)_p}{\rho T^{-1}[T(\partial_T s)_p]}=\frac{\beta T}{\rho c_p}$$

其中利用了 β 的定义(5.9)。再利用声压与特性阻抗 $\rho^0 c$ 之比即为粒子速度这一关系，乃得

$$T_1=\left(\frac{\beta T^0}{\rho^0 c_p}\right)p'=\frac{\beta c T^0}{c_p}v_x \tag{5.17}$$

同样取其平均值，这一项就是

$$\frac{\kappa c^2 T^0\beta^2}{2c_p^2}k^2\hat{v}^2=\frac{(\gamma-1)}{2c_p}k^2\hat{v}^2$$

其中利用了热力学关系 $\gamma-1=\dfrac{T^0\beta^2 c^2}{c_p}$。将上面这些关系代入(5.16)式，即得平面波中能量耗散的时间平均值：

$$\overline{\mathscr{D}}=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\mu+\frac{\gamma-1}{c_p}\kappa\right]k^2\hat{v}^2$$

在无损耗理想气体情形下的声能密度公式（即第三项为 0 的(5.13)式）中，再以平面波中的粒子速度 v 来取代声压 $p_1(=\rho c v)$ 即求得单位体积中平面声波总能量的时间平均：

$$\overline{E}=\frac{1}{2}\rho^0\hat{v}^2$$

对于在理想气体中传播的、强度 $I=c\overline{E}$ 的平面波，每当它通过一段单位距离，其能量就缩减份额 $2\alpha_{\mathrm{cl}}=\overline{\mathscr{D}}/I$，由此得出经典吸声系数（Stokes-Kirchhoff 公式）：

$$\alpha_{\rm cl}=\frac{\omega^2}{2\rho^0c^3}\left(\frac{4}{3}\mu+\frac{\gamma-1}{c_p}\kappa\right)\equiv\frac{\omega^2}{2\rho^0c^3}\delta({\rm Np/m}) \tag{5.18}$$

引进表征黏性和导热性过程的特征长度 l_v 和 l_h：

$$l_{\rm cl}\equiv\frac{1}{\rho^0c}\left[\frac{4}{3}\mu+(\gamma-1)\frac{\kappa}{c_p}\right]\equiv l_v+(\gamma-1)l_h \tag{5.19}$$

之后，(5.18)式可写为

$$\alpha_{\rm cl}-\frac{\omega^2}{2c^2}l_{\rm cl}$$

$l_{\rm cl}$的数量级与分子平均自由程相同，在常温常压下约为 10^{-5}cm。

5.1.5 实用的经典吸声系数

可将上述系数化为更为实用的形式。为此首先利用 Eucken 表式将 κ 与 μ 联系起来[114]

$$\kappa=(15R\mu/4)[4c_v/(15R)+3/5] \tag{5.20}$$

温度范围255～370K(−48～97℃)内的干空气的比值 c_v/R 不超过 5/2±0.4%；而在同一温度范围内的湿空气，该比值随着水汽浓度的增加而持续略为超出对于理想气体的值。因此若在(5.20)式中取 $c_v/R=5/2$ 不会使误差超过 1%，由此得到 $\kappa=19R\mu/4$，以此代入(5.18)式给出

$$\alpha_{\rm cl}=[2\pi^2f^2/(\gamma pc)](1.88\mu) \tag{5.18'}$$

由于声速 c 和黏性系数 μ 随温度变化，上式给出的 $\alpha_{\rm cl}$也随温度变化。按(1.17)式，$c\sim T^{1/2}$，而 μ 随温度的变化为(对于干空气：Sutherland 方程[114])：

$$\mu=\frac{\beta T^{1/2}}{1+(S/T)} \tag{5.21}$$

其中，β 和 S 均为经验参量；标准值分别为 $\beta=1.458\times10^{-6}\,{\rm kgm^{-1}s^{-1}K^{-1/2}}$，$S=110.4$K。采用 γ、R 和 M 的标准值并定义参考温度 T_0 为 293.15K，则①

$$c=343.23(T/T_0)^{1/2}{\rm m/s} \tag{1.17'}$$

$$\mu=7.318\times10^{-3}\frac{(T/T_0)^{3/2}}{T+110.4}\quad({\rm kg/m}) \tag{5.21'}$$

因此(5.18′)式成为

$$\alpha_{\rm cl}=5.578\times10^{-9}\frac{T/T_0}{T+110.4}f^2/(p^0/p_0)\qquad({\rm Np/m}) \tag{5.18'a}$$

其中 p_0 为参考压力，等于 1 大气压或 $1.011325\times10^5{\rm N/m^2}$。

① 这里忽略了吸收过程所引起的声速变化，在一相当好的近似下，声速可写成[116] $c=c_{\rm re}(1+\alpha^2c_{\rm re}/\omega^2)$，这里 $c_{\rm re}$为不存在任何吸收过程时所应测出的、亦即从(1.17)式算出的声速。对于 273.15～313.15K (0～40℃)的温度范围和 50～10MHz 的频率范围内的 α 值，假定 $c=c_{\rm re}$即意味着 $\alpha^2c_{\rm re}^2/\omega^2\ll1$，这时引入的计算误差不超过 0.3%。

5.1.6 黏性-导热介质中的波模式

用类似于第 2 章第 1 节中的步骤，原则上可从本章第 1.1 节～第 1.3 节中的五个基本方程消去任意四个变量而得出关于其余那个变量的“波动方程”，然而这是一个颇为繁复的过程，并且最后结果无论对阐明其物理含义还是对实际应用来说都不是一种方便的形式。而更方便的做法是用若干个分别描述不同运动模式的方程来代替一个“统一”的方程。这些模式在线性近似下相互独立因而可以叠加，仅在边界处发生耦合。

为此我们首先求出各种模式中波数 k 与频率 ω 之间的关系，即所谓频散关系。

在线性化的连续性方程(2.3)中用(5.10)式来代换 ρ_1，在线性化的导热方程(5.8a)中以(5.11)式来代换 T_1；而运动方程现在取(5.4′)式的形式较为方便，经线性化后成为

$$\rho^0\partial_t \boldsymbol{v} = -\nabla p_1 + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \tag{5.4′a}$$

设这组基本方程的平面波解为

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \hat{\Psi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{5.22}$$

这里的 ψ 代表 ρ_1，p_1 $\boldsymbol{v}$，s_1 或 T_1 中的任何一个，以之代入基本方程组，我们得到

$$\omega\left(\frac{1}{c^2}\hat{p}_1 - \frac{\beta\rho^0 T^0}{c_p}\hat{s}_1\right) = \rho^0\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}} \tag{5.23}$$

$$\mathrm{i}\omega\rho^0\hat{\boldsymbol{v}} = \mathrm{i}\boldsymbol{k}\hat{p}_1 + \mu k^2\hat{\boldsymbol{v}} + \frac{\mu}{3}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}) \tag{5.24}$$

$$\mathrm{i}\omega\rho^0 c_p\hat{s}_1 = \kappa k^2\left(\frac{\beta}{\rho^0}\hat{p}_1 + \hat{s}_1\right) \tag{5.25}$$

将(5.26)式分别叉乘和点乘以 $\boldsymbol{k}$，我们有

$$(\mathrm{i}\omega\rho^0 - \mu k^2)(\boldsymbol{k}\times\hat{\boldsymbol{v}}) = 0 \tag{5.26}$$

$$\left[\omega\rho^0 + \mathrm{i}\frac{4}{3}\mu k^2\right](\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}) = k^2\hat{p}_1 \tag{5.27}$$

由(5.26)式解出

$$k^2 = \frac{\mathrm{i}\omega\rho^0}{\mu} \tag{5.28}$$

或 $\boldsymbol{k}\times\hat{\boldsymbol{v}}=0$，后一种可能的解对应于 $\boldsymbol{k}$ 与 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 平行的纵波，从(5.23)式和(5.27)式两式中消去 $\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}$，再与(5.25)式联立，得到

$$\begin{aligned}&(\gamma-1)\left(1+\mathrm{i}\frac{c}{\omega}l_v k^2\right)\hat{s}_1 - \left(1+\mathrm{i}\frac{c}{\omega}l_v k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}k^2\right)\left(\frac{\beta}{\rho^0}\hat{p}_1\right) = 0\\&\left(1+\mathrm{i}\frac{c}{\omega}l_h k^2\right)\hat{s}_1 + \mathrm{i}\frac{c}{\omega}l_h k^2\left(\frac{\beta}{\rho^0}\hat{p}_1\right) = 0\end{aligned} \tag{5.29}$$

其中利用了热力学关系 $\beta^2 T^0 c^2/c_p=\gamma-1$；$l_v$ 和 l_h 由(5.19)式定义。

方程组(5.29)存在非无效解的前提是其特征行列式为0，由此得到下列关于 k^2 的二次方程(Kirchhoff 频散关系)：

$$l_h\left(l_v+\mathrm{i}\frac{c}{\omega}\right)k^4+\left[1-\mathrm{i}\frac{c}{\omega}(l_v+\gamma l_h)\right]k^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2=0 \tag{5.30}$$

只要声波频率不是太高(如10MHz以下)，$\frac{\omega}{c}l_v$ 和 $\frac{\omega}{c}l_h$ 均 $\ll 1$，这时可得到(5.30)式的近似解：

$$k^2\approx\left(\frac{\omega}{c}\right)^2+\mathrm{i}l_{cl}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \tag{5.31}$$

$$k^2\approx\mathrm{i}\frac{\omega}{cl_h}+(\gamma-1)\left(1-\frac{l_v}{l_h}\right)\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tag{5.32}$$

于是，描述三种不同模式的三种频散关系(5.28)式、(5.31)式和(5.32)式可统一地写成形式：

$$k^2+f(\mathrm{i}\omega)=0$$

但在所讨论情形下，k^2 相当于算符 $-\nabla^2$，而 $\mathrm{i}\omega$ 相当于 $-\partial_t$。因此对于波矢满足此频散关系的平面波(5.22)，我们有

$$[\nabla^2-f(-\partial_t)]\psi(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{5.33}$$

其中的 ψ 可以根据不同情况选取 $\rho_1,p_1,\boldsymbol{v},s_1$ 或 T_1 中最适当的一个。

例如，对于(5.28)式，取 $\psi=v_{vor}$(下标"vor"对应于"涡旋")，得到

$$\nabla^2\boldsymbol{v}_{vor}=\frac{\rho^0}{\mu}\partial_t\boldsymbol{v}_{vor} \tag{5.34}$$

以(5.28)式代入(5.27)式、(5.23)式和(5.25)式后联立求解，可得出 $\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}_{vor}$、$\hat{p}_{vor}$ 和 $\hat{s}_{vor}$ 均等于0，由此可见 $\boldsymbol{k}$ 必然与 $\boldsymbol{v}_{vor}$ 垂直，即这种模式是一种"横波"，而其压力、密度、温度和熵的扰动全部为0，实际上这是一种对应于不可压缩流的"涡旋"运动，而它所满足的方程(5.34)并非波动方程而是扩散方程。由于 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{vor}=-\mathrm{i}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{vor}=0$，所以该方程也可写为

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}_{vor}=-\frac{\rho^0}{\mu}\partial_t\boldsymbol{v}_{vor} \tag{5.34'}$$

类似地，由(5.31)式得到(下标"ac"对应于"声")

$$\nabla^2 p_{ac}-\frac{1}{c^2}\partial_t^2 p_{ac}+\frac{l_{cl}}{c^3}\partial_t^3 p_{ac}=0 \tag{5.35}$$

这一方程可看成是针对黏性和导热性作了少许修正的声扰动波动方程，由于这时 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}=-\mathrm{i}\nabla\times\boldsymbol{v}=0$，故声波仍是无旋的。考虑到 $\frac{\omega}{c}l_h\ll 1$，以(5.31)式代入(5.29)中第一式，求得这种声模式(或称传播模式)中的熵扰动

$$s_{ac} \approx \frac{\beta l_h}{\rho^0 c} \partial_t p_{ac} \tag{5.36}$$

为一二阶微量。在同等近似程度下由(5.23)式和(5.24)式得

$$\rho^0 \partial_t \boldsymbol{v}_{ac} \approx -\left[1 + \frac{l_v}{c} \partial_t\right] \nabla p_{ac} \tag{5.37}$$

由(5.10)式和(5.11)式并考虑到(5.36)式,得到

$$\rho_{ac} \approx \left[1 - \frac{\gamma - 1}{c} l_h \partial_t\right] \frac{p_{ac}}{c^2} \tag{5.38}$$

$$T_{ac} \approx \left[1 + \frac{l_h}{c} \partial_t\right] \left(\frac{T^0 \beta}{\rho^0 c_p}\right) p_{ac} \tag{5.39}$$

可以把这些结果(所谓极化关系)同未加修正的相应关系(即不计方括号中的第二项)比较,我们看出,在现在情况下,声波除了衰减之外,v_{ac}、ρ_{ac}和 T_{ac} 相对于 p_{ac} 都有一微小相移,熵的起伏 s_{ac} 很小,与 p_{ac} 相位相差 $\pi/2$。只要 $\frac{\omega}{c} l_{cl} \ll 1$,传播速度仍接近于绝热声速。

最后,(5.32)式(略去第二项)给出(下标"ent"对应于"熵")

$$\nabla^2 s_{ent} \approx \frac{1}{c l_h} \partial_t s_{ent} = \frac{\rho^0 c_p}{\kappa} \partial_t s_{ent} \tag{5.40}$$

其形式与(5.34)式完全相同,即为熟知的热扩散方程(Fourier 方程),而相应的模式称为热模式(或熵模式)。在这种模式中,与声模式相反,熵的扰动是主要的,而压力扰动≈0。由于同样有$\nabla \times \boldsymbol{v}_{ent} = 0$,故这种模式也是无旋的。在(5.25)式中代入(5.32)式(这时应计入第二项,否则得到的结果为 0),可求得这时的压力扰动

$$p_{ent} = -\frac{\gamma - 1}{\beta c} \rho^0 (l_h - l_v) \partial_t s_{ent} \tag{5.41}$$

为一比二阶微量更小的项(由于因子 $l_h - l_v$ 的存在),在(5.10)式和(5.11)式中代入(5.41)式便分别得到

$$\rho_{ent} \approx -\rho^0 \left(\frac{\gamma - 1}{\beta c^2}\right) \left[1 + \frac{l_h - l_v}{c} \partial_t\right] s_{ent} \tag{5.42}$$

$$T_{ent} \approx \frac{T^0}{c_p} \left[1 - (\gamma - 1) \frac{l_h - l_v}{c} \partial_t\right] s_{ent} \tag{5.43}$$

关于$\boldsymbol{v}_{ent}$的式子则需略为费些周折,先利用(5.27)式消去(5.24)式中的$\boldsymbol{k} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}$,略去小项后得 $\boldsymbol{k}\hat{p}_1 \approx \left[\omega\rho^0 + \mathrm{i}\,\frac{4}{3}\mu k^2\right] \hat{\boldsymbol{v}}$,再以略去第二项的(5.32)式和(5.41)式代入,经简化后即得

$$\boldsymbol{v}_{ent} \approx \frac{\gamma - 1}{\beta c} l_h \nabla s_{ent} \tag{5.44}$$

5.2 分子转动弛豫吸声①

5.2.1 内自由度模式的吸收机制

内自由度的弛豫过程也会导致声能损失。当局部温度升高时，内自由度模式的能量也增加，如温度变化得很慢，内能变化的量就等于$c_{int}\Delta T$，这里c_{int}为内能模式比热容，而ΔT为环境温度与存在声波时温度之局部差。对于低频，局部温度取极大值时进入内模式的任何能量在局部温度一旦开始下降时便立即减小，然而气体平动能与内能模式之间这种能量的来回转移仅当气体分子相互碰撞时才能够发生。在任何一次碰撞中都有一定概率的能量被转移，这依赖于所涉及的特定内模式。于是，随着频率的增加，内模式与平动之间能量的来回转移引入一时间延迟，其值介于局部温度下降所需时间与内能模式将能量给予平动模式所需时间二者之间。这一时间延迟就造成声能的下降——衰减。对于一特定的能量模式，在非常低的频率下不会造成吸收。随着频率上升到被称为该模式的弛豫频率(或者，吸收最大的频率)的某个值f_r时吸收就增加了。然后，由于局部温度的变化快到使内模式在能量转移上总是落后，弛豫吸收就为常数，对于任一特定的弛豫过程，吸收都可用如下形式的关系来表达[114,117]：

$$\alpha=\frac{\pi s}{c}\frac{f^2/f_r}{1+(f/f_r)^2} \tag{5.45}$$

其中，s为弛豫强度(单位为Np)，依赖于弛豫模式的比热容；而$f=\omega/2\pi$为声波频率。

在下节中将表明：对于单个弛豫自由度，上式可写为

$$\alpha=-\frac{\delta K_s/K_s^\infty}{2c}\frac{\omega^2\tau'_{vs}}{1+(\omega^2\tau'_{vs})^2} \tag{5.45$'$}$$

其中K_s^∞为瞬时绝热压缩率($=pc_p^\infty/c_v^\infty$；c_p^∞和c_v^∞分别为频率远高于f_r时的定压和定容比热容)；δK_s为弛豫压缩率；而τ'_{vs}为定容、绝热条件下混合物中反应物分压下的弛豫时间。对于单个弛豫自由度，$\delta K_s/K_s^\infty=-Rc'/[c_p^\infty(c_v^\infty+c')]$，这里$c'$为弛豫模式的比热容。

5.2.2 转动弛豫的贡献

大气的主要成分O_2、N_2和CO_2都有两个转动自由度，因而转动弛豫的转动比热容$c'=R$；H_2O有三个转动自由度而其转动比热容为$3R/2$；然而，由于在温度范

① 关于大气中的声吸收，特别是分子吸收方面，文献[116]作了很好的评述，本章中这几节即以它为主要蓝本。

围273～313K(0～40℃)内空气中水汽的摩尔份额至多为8%，在相当精确的近似下可以略去水汽对空气转动比热容的贡献。

每一转动能级的弛豫时间各不相同，所造成吸收对频率的函数关系可以相当复杂[118,119]，可是相比于平均热能来，空气各主要成分的转动能级更为接近。结果，空气转动弛豫过程的行为就像转动能级是连续的，而可用单个等容、绝热条件的弛豫时间 $\tau'_{vs,rot}$ 来描述。对于低于10MHz的所有频率，$\tau'_{vs,rot}$ 都 $\ll\omega^{-1}$[120]，对于这一情形，在以上讨论的 $\delta K_s/K_s^{\infty}$ 值下，并考虑到 $c_v=c_v^{\infty}+c'=c_v^{\infty}+R$ 和 $R/c_v=\gamma-1$，(5.45)式就成为

$$\alpha_{rot}=\{[\pi R(\gamma-1)]/(cc_p^{\infty})\}(f^2/f_{r,rot}) \tag{5.46}$$

其中

$$f_{r,rot}=1/(2\pi\tau'_{vs,rot}) \tag{5.47}$$

为转动弛豫频率。

弛豫频率为计算弛豫对吸收的贡献所必需，其值可用单位大气压下气体中所发生的二元(两种成分之间)反应的归一化反应速率来表达。

5.2.3　碰撞反应速率

当一多原子气体被压缩时，全部压缩功并非立即均分到每个自由度上，因为转动模式和振动模式仅仅通过二元碰撞才能分担能量转移。这种能量转移反应可用两种化学成分 A 与 B 之间的反应式表为形式

$$A^*+B\underset{k'_b}{\overset{k'}{\rightleftharpoons}}A+B \tag{5.48}$$

其中星号(*)表示一受激分子，而 k' 和 k'_b 分别为混合物中两种成分分压下的前向反应速率和反向反应速率(单位为 s^{-1})。当速率常数 k' 和 k'_b 均为已知时，决定振动能或转动能的变化的比反应率方程即可解出，随即给出相应自由度的有效比热容——所用有效比热容一词的涵义就是声波所涉及的比热容。

二元反应速率 k' 可写成碰撞频率 ν' 与一定碰撞下的能量转移概率 Π 之乘积

$$k'=\nu'\Pi \tag{5.49}$$

标准大气压 p_0 下的碰撞频率① $\nu=[\sigma n\bar{v}]_{p_0}$ 这里 σ 为参与反应的分子的碰撞截面；n 为每单位体积的分子数；$\bar{v}$ 为分子平均速率。由于对于一给定温度，n 正比于压力，所以可用 ν 来写出 ν'：$\nu'=[\sigma n\bar{v}]_{p_0}[p/p_0]=\nu p/p_0$　或者

$$k'=\nu\Pi p/p_0=kp/p_0$$

其中 k 为标准大气压下的反应率。在分子均为刚性球的假定下，碰撞频率 ν' 可用黏性系数 μ 表出[114]：$\nu'=1.25p/\mu$。如只有一个能量转移反应发生，则定容、等温

① 加撇"′"的量对应于气体实际压力下的条件，而未加撇的量则对应于标准大气压下的条件。

下的弛豫时间 τ'_{vT} 可同 k' 与 k'_b 之差联系起来：

$$1/\tau'_{vT} = k' - k'_b \tag{5.50}$$

由“细致平衡原理”，$k'_b = k'\exp[-\Delta E/(k_B T)]$，这里 ΔE 为反应中每摩尔的前向转移能量，而 k_B 为 Boltzmann 常数，对于单个能量转移反应[121]，则有

$$\tau'_{vs} = (c_p^{\infty}/c_p^0)\tau'_{vT} \tag{5.51}$$

其中 c_p^0 为 $f \ll f_r (=1/2\pi\tau'_{vs})$ 时的定压比热容。由于 k' 和 k'_b 都正比于压力，τ'_{vs} 就反比于压力。弛豫频率与 τ'_{vs} 成反比因而与压力成正比。习惯上将能量转移率规定为常数，而将弛豫时间规定在标准大气压下。

5.2.4　转动弛豫吸声系数

以(5.49)式代入(5.50)式后再将结果代入(5.51)式，并假定 $\exp[-\Delta E/(k_B T)]$ 很小，我们就得到 $\tau'_{vs,\mathrm{rot}} = c_p^{\infty}/(c_p^0 \nu' \Pi_{\mathrm{rot}})$ 或者，利用(5.47)式，得到

$$f_{r,\mathrm{rot}} = c_p^0 \nu' \Pi_{\mathrm{rot}}/(2\pi c_p^{\infty}) \tag{5.52}$$

其中 Π_{rot} 为多重转动能态的平均概率，习惯上将此概率写成 $\Pi_{\mathrm{rot}} = 1/Z_{\mathrm{rot}}$，这里 Z_{rot} 为温度发生变化后建立转动平衡一般所需的碰撞数。结合(5.46)式和(5.52)式并代入 $\nu' = 1.25p/\mu$，将结果编排成(5.18′)式那样的形式，即得

$$\alpha_{\mathrm{rot}} = [2\pi^2 f^2/(\gamma p c)]\mu\left\{\gamma(\gamma-1)R/(1.25c_p^0)\right\}Z_{\mathrm{rot}} \tag{5.53}$$

再以 $\gamma = 1.4$ 和 $c_p^0/R = 7/2$ 代入，则上式花括号内的项即为 0.128，这是一个与温度无关的值，因为转动比热容不随温度变化。比较(5.18′)式和(5.53)式，现可写出

$$\alpha_{\mathrm{rot}}/\alpha_{\mathrm{cl}} = 0.128Z_{\mathrm{rot}}/1.88 = 0.0681Z_{\mathrm{rot}} \tag{5.54}$$

对于干空气，转动碰撞数 Z_{rot} 曾在接近室温下[120,122]和较高温度下[123]测出，综合这些实验结果[124]，可在温度范围 293～690K(20～417℃)内写出

$$Z_{\mathrm{rot}} = 61.1\exp(-16.8T^{1/3}) \tag{5.55}$$

承认水汽的存在但忽略很小的水-汽转动比热容弛豫过程，转动碰撞数可写为

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{rot}} = \{&[X(N_2+O_2)/Z_{\mathrm{rot}}(N_2+O_2)] \\ &+[X(H_2O)/Z_{\mathrm{rot}}(N_2+O_2+H_2O)]\}^{-1} \end{aligned} \tag{5.56}$$

其中 $X(N_2+O_2)$ 为氮与氧摩尔分数之和；$Z_{\mathrm{rot}}(N_2+O_2)$ 为干空气的转动碰撞数；$X(H_2O)$ 为水的摩尔分数；而 $Z_{\mathrm{rot}}(N_2+O_2+H_2O)$ 为 N_2 和 O_2 建立转动平衡所需要的 H_2O 分子碰撞数。最后这个量可取从∞到1(概率0～1)的值。最终的 Z_{rot} 将主要依赖于 $X(H_2O)$(如果 $Z_{\mathrm{rot}}(N_2+O_2+H_2O)=1$)。因当 $X(H_2O) \lesssim 0.02$ 时 $Z_{\mathrm{rot}}(N_2+O_2) \approx 5$[125,126]，混合物转动数的改变不超过2%，故 $Z_{\mathrm{rot}} \approx Z_{\mathrm{rot}}(N_2+O_2)$；因此证明了水汽对转动碰撞数的影响可以忽略。

将(5.45)式同(5.55)式结合起来，就给出由于经典吸收因子和转动弛豫二者结合而成的吸声系数：

$$\alpha_{cr} = 5.578\times10^{-9}\,\frac{T/T_0}{T+110.4}\,\frac{[1+4.16\exp(-16.8T^{-1/3})]}{p/p_0}f^2 \tag{5.57}$$

对不同的温度估算上式，表明在213～373K(－60～100℃)之间的温度范围内，可以采用如下的简化经验公式：

$$\alpha_{cr} = 1.83\times10^{-11}\,\frac{(T/T_0)^{1/2}}{p/p_0}f^2 \tag{5.57a}$$

其结果与(5.57)式相差不到2%。

5.3　分子振动弛豫吸声

5.3.1　振动受激分子的摩尔数变化率

在上节中讨论转动弛豫吸收时，由于假定了所有转动模式都以单一的弛豫时间与平动模式交换能量，弛豫吸收的数学形式才得以显著简化。对转动模式为正确的这一假定对振动模式却不适用，因为各振动模式以极为不同的速率与平动模式交换能量。这一情况由于碰撞中分子的各振动模式之间也要交换振动能而进一步复杂化——复杂到令人生畏的程度。当不存在振动能相互之间的转移时，类型 i 振动受激分子数的微分方程只依赖于能量转移率常数和参与碰撞各部分的分压。然而，振动与振动之间的能量转移过程使各微分方程相互耦合，因为类型 i 的弛豫速率依赖于类型 j 等的振动受激状态。

在多成分弛豫气体的完整吸声理论中，考虑的是如下形式的能量转移系统[121,127~129]：

$$M_i + M_j \underset{k_{qb}}{\overset{k_q}{\rightleftharpoons}} M_k + M_l + \Delta E_q \tag{5.58}$$

其中各个 M 代表处于某一任意振动能级的大气成分(mol)；ΔE_q 为反应中每摩尔大气成分从振动模式中转移出的能量(负值表示能量转移至平动模式)；k_q 为标准大气压下反应 q 的速率(s^{-1})而 k_{qb} 为其逆反应速率。注意(5.58)式中的反应速率与(5.48)式中的不同：这里的是在标准大气压下而那里的是在相应的分压下。

反应中能量转移的净速率为$[d_t\xi_q]\Delta E_q$(ξ_q 为能量转移反应 q 中所产生的某给定振动受激大气成分的净摩尔数，单位 kg・mol)。量 $d_t\xi_q$ 由每单位时间所产生的 M_k 或 M_l 的摩尔数所量度，并由下式给出：

$$d_t\xi_q = m(p/p_0)(k_qX_iX_j - k_{qb}X_kX_l) \tag{5.59}$$

其中 m 为总摩尔数；p/p_0 比是在标准大气压下；各个 X 为相应成分的摩尔分数。令 $r_q = k_q^0X_i^0X_j^0$(在稳定态条件下与 $r_{qb} = k_{qb}^0X_k^0X_l^0$ 相等)，将上式在以上标0标明的平衡态附近展开，并利用

$$k_q/k_{qb} = \exp[-\Delta E_q/(RT)]$$

即得

$$d_t\xi_q = m\left(\frac{p}{p^0}\right)^0 \gamma_q\left[\sum_g \frac{\partial \ln[X_iX_j/(X_kX_l)]}{\partial m_g}(m_g - m_g^0) + \frac{\Delta E_q}{RT^2}(T-T^0)\right] \tag{5.60}$$

其中 $m_g = mX_g$ 为第 g 类分子的摩尔数，而

$$\frac{\partial \ln[X_iX_j/(X_kX_l)]}{\partial m_g} = (mX_g^0)^{-1} \times \begin{cases} 2, 当\ g = i = j \\ 1, 当\ g = i\ 或\ j \\ 0, 当\ g \neq i,j,k\ 或\ l \\ -1, 当\ g = k\ 或\ l \\ -2, 当\ g = k = l \end{cases}$$

对于每一反应 q 都存在一个形式如(5.60)式的反应速率方程。

为了处理多原子气体混合物中具有潜在重要性的大量反应，须采用矩阵符号，所有的 $d_t\xi_q$ 都组合在矩阵 $\boldsymbol{\zeta}$ 中；所有的 $r_q = r_{qb}$ 都置于对角矩阵 $\boldsymbol{k}$ 的对角线上；所有的$(m_g - m_g^0)$都置入矩阵 $\boldsymbol{m}$ 中；矩阵 $\boldsymbol{X}$ 在其对角线上包容着摩尔分数 X_g^0，而在其余位置上都是 0。非方形矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的各行对应于不同能级；而各列对应于不同反应：所以 N_{iq} 为 1、2、−1 或 −2 就分别表示从右端或从左端参与反应 q 1 次或 2 次的能级。如能级不参与反应的任何一方或者参与双方的次数相等，那么 $N_{iq}=0$。将 ΔE_q 表为 $\tilde{N}\boldsymbol{u}$，这里 $\boldsymbol{u}$ 为一以能级每摩尔的能量为矩阵元的矩阵，而 $\tilde{\boldsymbol{N}}$ 为 $\boldsymbol{N}$ 的转置矩阵，现在可将振动受激分子摩尔数的变化率写为

$$d_t\boldsymbol{m} = -(p/p_0)\boldsymbol{N}\boldsymbol{k}\tilde{\boldsymbol{N}}[\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{m} - (m/RT^2)\boldsymbol{u}(T-T^0)] \tag{5.61}$$

声学实验通常都在绝热条件下完成，故可写出

$$T - T^0 = [-\tilde{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{m} - pm(v - v^0)]/(mc_v^\infty) \tag{5.62}$$

其中，v 为比容(密度之倒数)，而 c_v^∞ 为非弛豫比热容(即当考虑振动弛豫时平动模式和转动模式所引起的比热容)。结合(5.61)式和(5.62)式，令 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，将 $v-v^0$ 写作 $-(v/\rho)(\rho-\rho^0)$，并计及对于正弦波 $d_t = i\omega$，即得到

$$\boldsymbol{m} = \left[\frac{i\omega\boldsymbol{I}}{p/p_0} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{k}\tilde{\boldsymbol{N}}\left(\boldsymbol{X}^{-1} + \frac{\boldsymbol{u}\tilde{\boldsymbol{u}}}{Rc_v^\infty T^2}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{k}\tilde{\boldsymbol{N}}\frac{\boldsymbol{u}pmv}{\rho Rc_v^\infty T^2}(\rho-\rho^0) \tag{5.63}$$

在绝热、等容条件下，(5.62)式中的温度变化 $T-T^0$ 即等于 $-\tilde{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{m}/(mc_v^\infty)$，这是由于受激分子数目的增加导致平动能减小而使能量从振动模式转移到平动模式。对于绝热情形，(1.10)式成立，利用理想气体定律后，$T-T^0$ 就等于$(T/p)(p-p^0)$，所以

$$(p-p^0)/(\rho-\rho^0) = (p/T)(-\tilde{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{m}/(mc_v^\infty))/(\rho-\rho^0) \tag{5.64}$$

5.3.2 动态绝热压缩系数

声波的衰减体现于其波数为复数，可写出

$$\omega/k = c[1-\mathrm{i}(\alpha\lambda/2\pi)]^{-1} = (K_s^{\mathrm{dyn}}/\rho^0)^{1/2} \tag{5.65}$$

其中 K_s^{dyn} 为依赖于频率的(即动态的)复绝热压缩系数，单位为 $\mathrm{Np/m^2}$，可写成

$$K_s^{\mathrm{dyn}} = K_{s,\mathrm{int}}^{\mathrm{dyn}} + K_s^{\infty} \tag{5.66}$$

其中 K_s^{∞} 为瞬时贡献，而 $K_{s,\mathrm{int}}^{\mathrm{dyn}}$ 为弛豫内能模式的贡献。一般说来，绝热压缩系数 K_s 可由压力和密度的变化定出，为 $\rho^0(\Delta p/\Delta\rho)_s$。

瞬时项 K_s^{∞} 可由(1.10)式求得，求其对 ρ 的微商即给出 $K_s^{\infty}=\rho(\partial_\rho p)_s=\gamma p$，由于一直假定不能偏离绝热条件，$\gamma$ 就应为瞬时比热容比所取代，因而 $K_s^{\infty}=pc_p^{\infty}/c_v^{\infty}$。而 $K_{s,\mathrm{int}}^{\mathrm{dyn}}$ 则可由(5.64)式求出，以(5.63)式中之 $\boldsymbol{m}$ 代入并采用近似：$pv/(RT)\approx1$ 而 $\rho^0/\rho\approx1$，即得

$$K_{s,\mathrm{int}}^{\mathrm{dyn}} = \left(\frac{p}{c_v^{\infty}T^2}\right)\tilde{\boldsymbol{u}}\left[\frac{\mathrm{i}\omega\boldsymbol{I}}{p/p_0} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{k}\tilde{\boldsymbol{N}}\left(\boldsymbol{X}^{-1} + \frac{\boldsymbol{u}\tilde{\boldsymbol{u}}}{Rc_v^{\infty}T^2}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{k}\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{u} \tag{5.67}$$

将方括号中第二项矩阵(令其等于 $\boldsymbol{N}\boldsymbol{k}\tilde{\boldsymbol{N}}(\mathscr{D})$)用本征值和本征矢写出，上式即可得到简化。求解下列方程即可求出右旋本征矢 $\boldsymbol{r}_j$ 和左旋本征矢 $\boldsymbol{l}_j$：

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{k}\tilde{\boldsymbol{N}}(\mathscr{D})^{-1}\boldsymbol{R} \tag{5.68}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{L}} = \tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{k}\tilde{\boldsymbol{N}}(\mathscr{D})^{-1} \tag{5.69}$$

其中，$\boldsymbol{R}$ 为以右旋本征矢为列元的矩阵；$\tilde{\boldsymbol{L}}$ 为以左旋本征矢为行元的矩阵；而 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为以本征值为对角元而其余各元均为0的矩阵。将(5.68)式转置后与(5.69)式比较，即得

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \tilde{\boldsymbol{R}}(\mathscr{D})^{-1} \tag{5.70}$$

因为左、右旋本征矢为正交并可归一化为1，所以 $\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{I}$，将(5.70)式乘以 R 后代入乘以 $\boldsymbol{R}$ 的(5.69)式即得

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{k}\tilde{\boldsymbol{N}} \tag{5.71}$$

这样(5.67)式即可写成

$$K_{s,\mathrm{int}}^{\mathrm{dyn}} = -\left(\frac{p}{c_v^{\infty}T^2}\right)\tilde{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{R}\left[\frac{\mathrm{i}\omega\boldsymbol{I}}{p/p_0} + \boldsymbol{\Lambda}\right]^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{u} \tag{5.67a}$$

现在上式就是矢 $\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{u}$ 的纯二次型，而可写成单一的求和形式：

$$K_{s,\mathrm{int}}^{\mathrm{dyn}} = -\left(\frac{p}{c_v^{\infty}T^2}\right)\sum_j \frac{\tilde{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{r}_j^2}{1+\mathrm{i}\omega\tau_{vs,j}} \tag{5.67b}$$

其中 $1/\tau_{vs,j}$ 为矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的第 j 个对角元。将 $-p(\tilde{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{r}_j)^2/(c_v^{\infty2}T^2)$ 写作 δ_jK_s，代入(5.66)式后得

$$K_s^{\mathrm{dyn}} = K_s^{\infty}\left[1+\sum_j\frac{\delta_jK_s/K_s^{\infty}}{1+\mathrm{i}\omega\tau_{vs,j}}\right] \tag{5.72}$$

将(5.65)式平方后令其等于除以 ρ^0 的(5.72)式，然后将实部与虚部分开而给出

$$\left(\frac{c}{c^{\infty}}\right)^2 = 1 + \sum_j \frac{\delta_j K_s/K_s^{\infty}}{1+(\omega\tau_{vs,j})^2} \tag{5.73}$$

$$\alpha\lambda\left(\frac{c}{c^{\infty}}\right)^2 = -\pi\sum_j \frac{\delta_j K_s/K_s^{\infty}}{1+(\omega\tau_{vs,j})^2}\omega\tau_{vs,j} \tag{5.74}$$

其中 $c^{\infty}=(K_s^{\infty}/\rho^0)^{1/2}$ 为频率高于弛豫频率时的声速。

(5.74)式代表一组弛豫吸收曲线之和，其中每一曲线对应于不同的弛豫时间 $\tau_{vs,j}$ 和弛豫强度 $\delta_j K_s/K_s^{\infty}$。一般说来，弛豫时间和弛豫强度的数目与气体所能获得的能量模式数目一样多。但是，大多数这类过程的弛豫强度都很小，因此它们对声吸收的贡献实际上可以忽略。

5.3.3 振动弛豫吸声系数

为了确定吸声系数的量值，必须验明空气中发生的能量转移过程，并从每一反应中所出现不同分子二元混合物的实验工作中确定出反应速率。

根据(5.74)式用计算机程序来计算振动弛豫吸收过于复杂，况且各有关速率常数并非精确已知到可使声吸收的精度优于±10%。对完整计算的检验表明：在(5.74)式的求和式中只有三项足够大，而其中一项的贡献还不超过1%[129]。由于基本的反应速率数据的不确定性限制了计算精度为±5%，所以这第三项的1%贡献完全可以忽略。再者，比值 $(c/c^{\infty})^2$ 与1的差别仅为0.1%(在频率低于10MHz和1大气压下)；因此(5.74)式可写为

$$\alpha\lambda = -\pi\frac{\delta_1 K_s/K_s^{\infty}}{1+\omega^2\tau_{vs,1}^2}\omega\tau_{vs,1} - \pi\frac{\delta_2 K_s/K_s^{\infty}}{1+\omega^2\tau_{vs,2}^2}\omega\tau_{vs,2} \tag{5.75}$$

其中下标1和2标示与 $\delta_j K_s/K_s^{\infty}$ 两个最大值相联系的弛豫时间和弛豫强度。对用普遍理论[129]计算出来的 $\delta_1 K_s/K_s^{\infty}$ 和 $\delta_2 K_s/K_s^{\infty}$ 的量值进行仔细检验后表明：这两项几乎都与频率无关而可进一步写出

$$\begin{aligned} \delta_1 K_s K_s^{\infty} &\approx -c'(O_2)R/\{c_p^{\infty}[c_v^{\infty}+c'(O_2)]\} \\ \delta_2 K_s K_s^{\infty} &\approx -c'(N_2)R/\{c_p^{\infty}[c_v^{\infty}+c'(N_2)]\} \end{aligned} \tag{5.76}$$

其中 $c'(O_2)$ 和 $c'(N_2)$ 分别为 O_2 和 N_2 的振动比热容。

空气中这两个重要过程的弛豫强度接近于每个分子各自的单个弛豫的期望值，因此可以断定(至少近似地)：过程1对应于 O_2 分子弛豫而过程2对应于 N_2 分子弛豫，因此上式中的下标1和2可分别代之以O和N，再以 $\lambda=c/f$ 和 $\omega=2\pi f$ 代入，(5.75)式即可写为

$$\alpha_{vib,j} = \frac{\pi s_j}{c}\frac{f^2/f_{r,j}}{1+(f/f_{r,j})^2} \quad (\text{Np/m}) \tag{5.77}$$

其中，j=O 或 N；$s_j=c_j'R/[c_p^{\infty}(c_v^{\infty}+c_j')]$；而 $f_{r,j}=1/(2\pi\tau_{vs,j})$。弛豫强度 s_j 可用

Planck-Einstein 关系与特定的大气成分和温度联系起来[130]：

$$c'_j/R = \frac{X_j(\theta_j/T)^2 e^{-\theta_j/T}}{(1-e^{-\theta_j/T})^2} \tag{5.78}$$

其中 X_j 为所考虑成分的摩尔分数：对氧为 0.20948 而对氮为 0.78084[131]；θ_j 为特征振动温度：对氧为 2239.1K 而对氮为 3350.0K[132]。在温度范围 0～40℃内，c'，相对于 c_p^∞ 很小，所以 $c_p^\infty \approx c_p$，而 $c_v^\infty + c'_j = c_v$。因此 $s_j \approx (c'_j R)(R^2/c_p c_v)$。采用导出(5.18′)式时所作近似的说明，量$(R^2/c_p c_v)$就可令之等于$(\gamma-1)R/c_p$，此值可算出为 4/35，因此(5.77)式即可写成

$$\alpha_{\mathrm{vib},j} = \frac{4\pi X_j}{35c}\frac{(\theta_j/T)^2 e^{-\theta_j/T}}{(1-e^{-\theta_j/T})^2}\frac{f^2/f_{r,j}}{1+(f/f_{r,j})^2} \tag{5.77′}$$

如果氧和氮的弛豫频率 $f_{r,j}$ 均为已知，即可从上式算出振动弛豫引起的声吸收。

5.3.4 氧和氮的振动弛豫频率

对于氧和氮振动弛豫的最大吸收频率可由普遍理论算出[126]，这一计算阐明了频率 $f_{r,j}$对水汽浓度的依赖性。但是，各种能量转移速率与作为水汽含量函数的最大吸收频率之间并无简单的关系，$f_{r,j}$可对不同的水汽浓度算出，然后可将某种类型的数值展开式用作 $f_{r,j}$对水汽含量的函数，而其中的常数可利用所有已知的反应速率从普遍理论确定出。下面采用的是关于 $f_{r,O}$函数形式的近似解[133,134]：

$$f_{r,O} = (p/p_0)\{24 + 4.41\times10^4 h[(0.05+h)/(0.391+h)]\} \tag{5.79}$$

其中 h 为水汽的摩尔百分数，上式中各常数可由普遍理论或空气中的实验测量确定。普遍理论预言：在低湿度时，涉及振动能从 O_2 转移到 CO_2 再到平动模式的能量转移速率建立了 $f_{r,O}$值的下限[126]，这一下限的存在表明了在采纳 $f_{r,O}$的近似关系之前考虑普遍反应方案的必要性。可是(5.79)式对于计算低层大气中常遇到的气象条件下大气的声吸收还是可以接受的。

分于能量转移速率常数，从而弛豫频率以几种方式依赖于温度：首先，对于给定的压力，温度增加造成密度减小；其次，温度增加值平均分子速率增加，这两种效应导致与黏性系数 μ 的变化成反比的碰撞频率的净降低，然而碰撞频率的降低通常为(5.49)式中能量转移概率 Π 与温度增加相伴随的增加所抵消而绰绰有余。$f_{r,O}$对温度的依赖关系难以从实验上精确确定，但有一点是肯定的，即无论从采用已知速率和值定速率的普遍理论[126]还是从实验数据[135]都可预言：在温度范围 0～40℃内 $f_{r,O}$对温度不是很敏感。因此(5.79)式中并没有明显的温度因子，只是在水汽摩尔百分数 h 中会有温度影响。

氮的最大吸收频率在理论上不像氧那么难以确定，因为它是被水汽对受激氮分子的直接“降激”[能量从振动转移到平动($V-T$)，或振动到振动($V-V$)一步转

移到 H_2O 分子]所支配的，二氧化碳在很低的水汽浓度下提供另一条弛豫路径，利用理论[136]所预言的温度依赖关系，可以预期如下的表达式[137]：

$$f_{r,N} = (p/p_0)(T/T_0)^{-1/2}[9 + 350h\exp\{-6.142[(T/T_0)^{-1/3} - 1]\}] \tag{5.80}$$

关于湿氮中振动弛豫的数据[138]表明：对于湿空气中的振动弛豫，(5.80)式可能显示了过多的对湿度的依赖性，这些数据与某些测量[137,139]是一致的，但与另一些实验室数据和现场数据[140,141]所确定的湿度依赖关系有差别，这种差别有待进一步探索。按照文献[138]中数据，(5.80)式应为下式所取代：

$$f_{r,N} = (p/p_0)(9 + 200h) \tag{5.80$'$}$$

5.3.5 水汽的摩尔分数(分子浓度)

如果已知水汽的摩尔百分数，振动弛豫过程对大气吸收的贡献即可由(5.77′)式、(5.79)式和(5.80)式或(5.80′)式确定。由 Avogadro 定律，摩尔百分数等于水汽分压 p_w 与湿空气取样体积的大气压 p 之比的百分数。因此，$h=100p_w/p$，引进液态水面纯水的饱和蒸汽压 p_{sat}，即成为

$$h = (100p_w/p_{sat})(p_{sat}/p) = h_r(p_{sat}/p) \tag{5.81}$$

其中 h_r 按定义为压力 p 和温度 T 下一给定湿空气样品的相对湿度。为方便起见，将上式以标准大气压 p_0 写出：

$$h = \frac{h_r(p_{sat}/p_0)}{p/p_0} \tag{5.81$'$}$$

由于对大多数声学测量来说 p_{sat} 通常都是未知的，所以在(5.81′)用于计算时需要另一表式。在给定的大汽压下，饱和蒸汽压只是温度的函数[142]。对应于不同 T 值下的 p_{sat} 值在各种有关手册(如文献[132]，[143])中均有表可查，但更方便的还是利用世界气象组织(WMO)所采纳的下列插值公式：

$$\begin{aligned}\lg(p_{sat}/p_0) = {} & 10.79586[1-(T_{01}/T)] - 5.02808\log(T/T_{01}) \\ & + 1.50474\times10^{-4}(1-10^{-8.29692}[(T/T_{01})-1]) \\ & + 0.42873\times10^{-3}(10^{4.76955}[1-(T_{01}/T)]-1) - 2.2195983\end{aligned} \tag{5.82}$$

其中，T_{01} 为三相点等温线温度，其国际公认的精确值为 273.16K[131]。上式所提供的 p_{sat}/p_0 值与表上的值的相符程度是：对于 273K(0℃)以上的温度在±0.06%以内[132]；对于233～273K(−40～0℃)之间的温度在±0.04%以内[143]。

对于指定的 T 值，p_{sat}/p_0 的值可由取(5.82)右端的反对数而求得；而 h 的值就可对已知的 h_r 和 p(或 p/p_0)的值从(5.81′)求得。

(5.82)式的一种简化形式为

$$\begin{aligned}\log(p_{sat}/p_0) = {} & 8.422 - 10.06(T_0/T) \\ & - 5.023\log(T/T_0) + 23\times10^{-4.44}(T_0/T)\end{aligned} \tag{5.82a}$$

其中 T_0=293.15K(20℃)。其适用的温度范围为233～373K(－40～100℃),而其结果与发表的值[132,143]相符程度是:在 253～373K 范围内为±0.06%而在233～253K范围内为±0.4%。因此,在允许精度作出中等程度牺牲的前提下,可用(5.82a)式取代(5.82)式以简化计算。

可以提供有关湿度信息的另一些形式包括混合比 h_{mr}、比湿度 h_s 和绝对湿度 h_a。这些量与水汽分子浓度 h 相互之间的关系如下所述。

混合比 h_{mr}定义为给定湿空气样品所含水汽质量 m_w 与该样品中水汽质量与之相结合的干空气质量 m_a 之比。按定义,水汽摩尔分数 X_w 是给定湿空气样品中所存在的水汽的物质的量 n_w 与湿空气总的物质的量 n_{ma}之比:$X_w=n_w/n_{ma}$。但 $n_{ma}=n_w+n_a$(n_a 为干空气的物质的量),因此

$$X_w = n_w/(n_w + n_a)$$

某物质给定样品中所呈现的物质的量为该物质的质量与相对分子质量之比。因此,对于只包含洁净的干空气和水汽混合物的湿空气来说,

$$X_w = (m_w/M_w)/[(m_w/M_w)+(m_a/M_a)] = (m_w/m_a)/[(M_w/M_a)+(m_w/m_a)]$$

其中 M_w 和 M_a 分别为水和干空气的相对分子质量,分别以它们的值 18.016 和 28.9644kg(mol)$^{-1}$以及 $m_w/m_a=h_{mr}$代入上式,并注意到 $h=100X_w$,即得

$$h = 100h_{mr}/(0.622 + h_{mr}) \tag{5.83}$$

比湿度 h_s 的定义为湿空气给定样品中所含水汽的质量 m_w 与水汽指定质量与之相结合的湿空气总质量 m_{ma}之比:$h_s=m_w/m_{ma}$。用类似于导出(5.83)式的推理,即可推出

$$h_s = h_{mr}/(1 + h_{mr})$$

或其倒逆关系

$$h_{mr} = h_s/(1 - h_s) \tag{5.84}$$

因此如 h_s 为已知,即可用(5.84)式和(5.83)式求出 h。

绝对湿度 h_a 的定义为湿空气给定样品中水汽质量 m_w 与该样品在压力 p 和温度 T 下所占总体积 V 之比:$h_a=m_w/V$。假定该样品遵循理想气体定律,则可对混合物中的水汽成分写出

$$m_w/V = M_w p_w/RT = h_a$$

其中 p_w 为给定样品中水汽的分压。引进 p_0 和 p,则有

$$h_a = (M_w p_w/RT)(p_0/p_0)(p/p)$$

由 Dalton 分压定律,$p_w/p=n_w/n_{ma}=X_w$,或 $p_w/p=h/100$。因此,

$$h_a = (M_w p_0/100R)(h/T)(p/p_0)$$

或

$$h = \frac{100R}{M_w p_0}\frac{Th_a}{p/p_0} \tag{5.85}$$

将各有关数值(前此均已引用过)代入后得

$$h = 4.5546 \times 10^{-1} \frac{Th_a}{p/p_0} \tag{5.85'}$$

其中 h_a 以 kg/m^3 为单位。

5.4 总吸声系数和附加吸收

5.4.1 总吸声系数

以上关于大气声吸收的叙述颇为繁赘,因此有必要作一简明扼要的总结。

对于静止、均匀的“纯”(但不排斥含有水汽)空气,大气的声吸收由若干机制组成:首先是由黏性和导热性引起的“经典”部分,它是温度、压力和频率的函数((5.18′a)式);其次是转动受激分子弛豫过程引起的“转动弛豫”部分,它同样也是温度、压力和频率的函数从而可以与经典部分结合起来用一个系数来表达①((5.57′)式);第三,也是最繁冗的部分,就是与振动受激分子的弛豫过程相关联的损耗,振动吸声系数 $\alpha_{\mathrm{vib},j}$ 是一非常复杂的表式,既依赖于温度、压力和频率,还依赖于所涉及的特定大气成分(主要是 O_2 和 N_2,假定它们各占 20.9%和 78.1%)以及所含水汽的摩尔百分数((5.77′)式)。这样大气的总吸声系数(5.1)就可写成

$$\alpha = f^2\left\{1.83\times10^{-11}\left(\frac{p_0}{p}\right)\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/2} + \left(\frac{4\pi X_j}{35c}\right)\left(\frac{\theta_j}{T}\right)^2 \frac{e^{-\theta_j/T}}{f_{r,j}+(f^2/f_{r,j})}\right\} \tag{5.86}$$

其中已假定因子 $(1-e^{-\theta_j/T})^2$ 在对计算大气吸收时重要的温度范围内等于 1。以(5.78)式中对于氧和氮的 X_j 和 θ_j 值代入并利用关于 c 的表式(1.17′),则上式成为

$$\alpha = f^2\left\{1.83\times10^{-11}\left(\frac{p_0}{p}\right)\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/2} + \left(\frac{T_0}{T}\right)^{5/2}\left(1.278\times10^{-2}\frac{e^{-2239.1/T}}{f_{r,O}+(f^2/f_{r,O})}\right)\right.$$
$$\left.+\left(1.069\times10^{-1}\frac{e^{-3352/T}}{f_{r,N}+(f^2/f_{r,N})}\right)\right\} \tag{5.86'}$$

其中 $f_{r,O}$ 和 $r_{r,N}$ 分别由(5.79)式和(5.80)式给出;摩尔百分数 h 按(5.81′)式和(5.82)式或(5.82a)式与相对湿度 h_r 相联系,或分别按(5.83)式、(5.84)式和(5.83)式、(5.85′)式与混合比 h_{mr}、比湿度 h_s、绝对湿度 h_a 相联系。

α 作为总体及其各个组成部分与频率的依赖关系图示于图 35 上。O_2 和 N_2 的分子振动损耗为空气中的水汽含量所“催化”,因此这部分损耗对空气中水汽含量(湿度)是非常敏感的。

① 正因为如此,在较早的文献中多引入“容积黏性系数”来描述转动弛豫的贡献。这一历史观点似乎可将一些概念“统一”起来,但本书采用的通过能量方程引入弛豫过程的处理法更符合其物理本质。

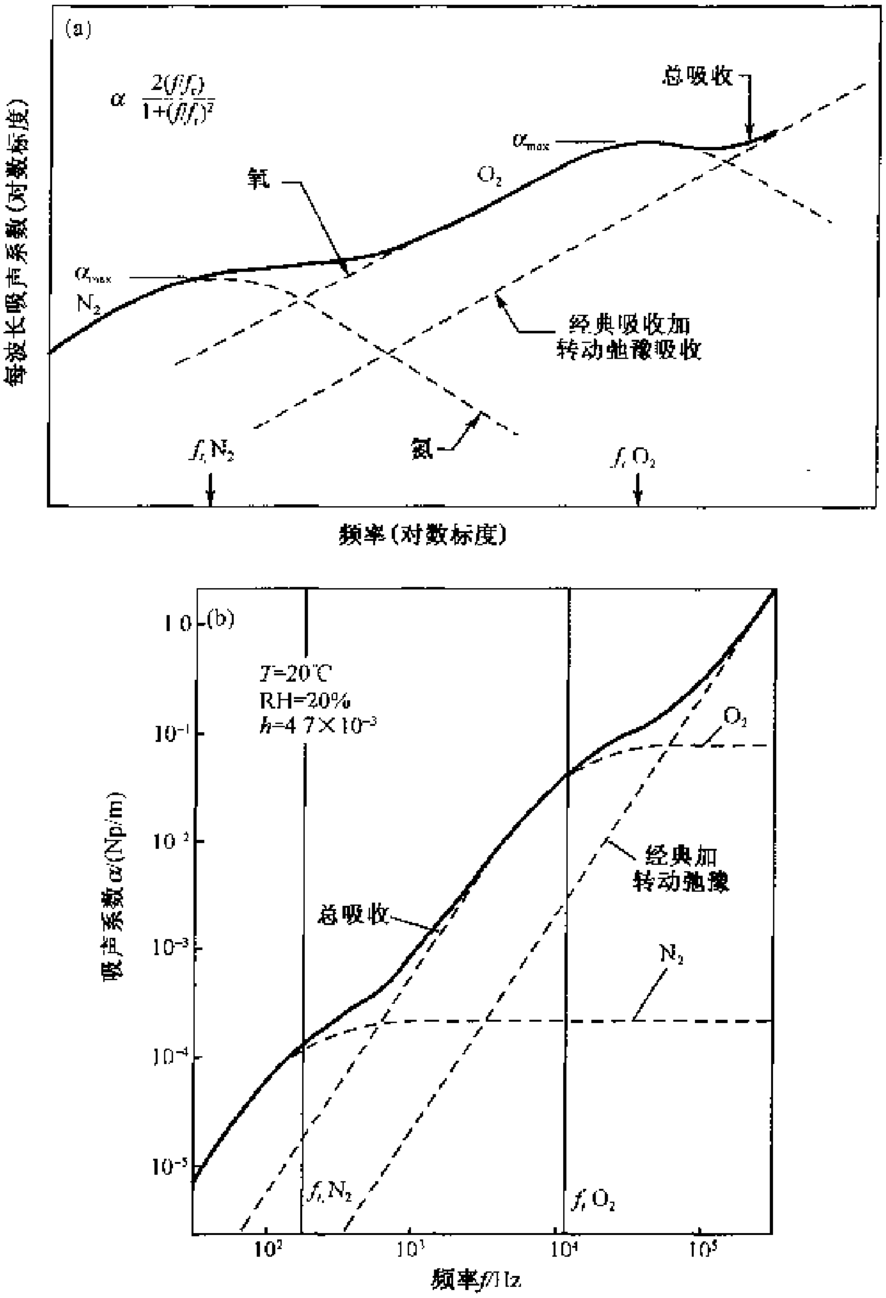


图 35　吸声系数对频率的依赖关系

(a)每波长的损耗;(b)每单位距离的损耗

5.4.2　附加吸声

在气体混合物中还有另一种吸声机制需要考虑，当存在压力或温度的局部梯度时，质量较小的分子以较高的热速率比较重分子更快地趋向平衡条件，由于压力梯度造成的扩散伴随着由于热梯度造成的较轻分子的“先行”扩散，这种扩散的结

果造成一种附加吸收[115]：

$$\alpha_{ad}=\frac{2\pi^2 f^2\gamma X_1 X_2 pD_{12}}{pc^3}\left[\frac{M_2-M_1}{M}+\frac{(\gamma-1)k_T}{\gamma D_{12}X_1X_2}\right]^2 \tag{5.87}$$

其中，X_1，X_2 和 M_1，M_2 分别为气体 1 和 2 的摩尔分数和相对分子质量；M 为气体 1 和 2 混合物的分子量；D_{12}为气体 1 和 2 之间的浓度扩散系数；k_T 为热扩散系数。

为了计算(5.87)式中的 α_{ad}，要求已知乘积 pD_{12} 和比值 k_T/D_{12}，这两个量可由分子运动论算出[114]，但实验值非常稀少。pD_{12} 这一项在考虑 O_2/H_2O 碰撞时最大；但是在这一情形下，不仅乘积 X_1X_2 很小，而且比值 $k_T/(X_1X_2)$ 也很小，对于 O_2/N_2 碰撞，X_1 和 X_2 在空气中相对地很大，但分子量之差 M_2-M_1 和 k_T 两者都很小。略去弛豫过程，对于空气可证明[112]：99.5%的总经典吸收可归属于(5.18′)式所给出的，因而在这一精度下由扩散所引起的附加吸收可不考虑。

顺便提一下来源于热辐射的另一种附加吸收，当气体的局部温度升高时，受激振动状态下的分子数目也按照 Maxwell-Boltzmann 统计规律增加。现如一受激内模式有一电偶极子矩，这一能量就可能以光子形式自发地发射出去，从而将能量从局部温度较高的区域带出，而在局部温度较低的区域内被再吸收或从声波附近完全损耗掉，在空气中，具有可观的电偶极子矩的分子是 H_2O 和 CO_2。关于热辐射造成声吸收问题的理论研究既少而又不够深入。例如，由于作出略去能量再吸收这一相当勉强的假定而使结果发生本质上的偏离。而在实验工作中(在文献[141]中作了总结)并未发现热辐射的迹象，因此看来它只是在实验数据所覆盖的频率范围(500～100MHz)以外才可能是重要的。

5.5　雾滴和悬浮微粒的声吸收

悬浮在大气中的雾滴和其他微粒可以造成声波的额外吸收机制，这些机制包括：微粒周围的蒸发和凝结、部分微粒为声波中速度起伏引开、微粒与周围空气之间的热交换、微粒形态振荡的激发以及伴随着热流和黏性效应的温度和速度梯度等。由于种种原因，对大气中实际存在的“天然雾”的实验数据很少，故对这些机制的认识不得不主要依靠理论分析和实验室中“人工雾”的数据。

对于大气中实际存在的雾，其雾滴大小和浓度(单位体积粒子数)变化范围相当大，但雾滴半径均在微米(μm)量级(平均约为 8μm)。单位体积内液态水含量与空气质量之比(下文中的 g_{wn})的典型值约为 1.5×10^{-3}。在实验室中可以得到量级为 0.01μm 的“亚微米”雾滴。对大小不同的雾滴在理论处理上并无本质上的差别[144,145]，但当雾滴大小减小时，弛豫过程移向较高频段而声吸收的极大值则以同一因子增加。

5.5.1　历史评述

声波在雾中的传播是继“风效应”问题①之后历史上有争议的第二个问题，早在 1708 年 Derham 就认为雾会引进额外的衰减，因而不利于声传播，Tyndall 进行的野外实验(1874)否定了上述结论，他认为有雾时温度起伏减小，可以解释声音通过雾时衰减减小这一观察结果②。争议直到 20 世纪 70 年代才得以解决，结论是：在低频可听声和次声范围内，雾滴和水汽之间热和动量的转移弛豫和质量转移以及潜热释放造成衰减增加；但当频率高于弛豫频率时，雾中的衰减就变得低于与水汽相关联的衰减了，这种较为令人满意的理论之所以成为可能，是由于发展了一种新模型，它把小水滴的“海洋”作为连续介质来处理，即看成是加人空气—水汽混合物中的第三种气体。在一很宽的频率范围内引进三种转移弛豫过程(质量、动量和热)，Marble 等发展了关于这种混合物的方程[146]，Cole 等从类似理论得出数值预言并得到与预言不尽相符的实验结果[147,148]。后来 Davidson 发现他们在能量守恒方程中忽略了空气与水汽性质之间的差别，抛弃了量级与所保留项量级相同的一些项，重新引进这些项就使修正后的预言与观察结果相当满意地相符[149]。根据计算，雾中衰减的最大值出现于 1Hz 以下的频率范围或 6～60s 的周期范围内。

Davidson 进一步引进非线性声学中的 Burgers 的方程(参见第 9 章第 1.4 节)，使原来表述这一复杂问题的 9 个偏微分方程可以用一个普遍方程来取代，而可计人经典吸收和“单分散性”雾(即雾滴大小相同的理想情形)中全部转移过程[150]；接着他又尝试计人湿空气的分子吸收和雾中的“多分散性”(即雾滴大小按一定的规律分布)[151]，全面讨论了可听声在雾中吸收的理论问题。

对声在雾中传播时雾滴表面蒸发和凝结现象的研究最早是 20 世纪初由 Ostwald 提出的。1941 年 Oswatitsch 得到这一效应所引起的衰减和频散，并求出低频下的最大吸收(在频率为 0 和∞时吸收均为 0)③。1948 年 Kundsen 等人首次对这一效应做了实验探讨[152]。

我国学者魏荣爵在 20 世纪 50 年代以及在 80 年代同他的学生们一起，在雾的声吸收方面做了许多工作，在实验上和理论上都有重要贡献。他修正了 Oswatitsch 的理论，并得出类似于分子吸收的结果：引进用雾滴常数表出的弛豫时间 τ，

① 由于 Rayleigh 曾在这方面犯过一个概念性错误而引起争议，参阅第 59 页上的脚注。

② 也可以这样认为：有雾时衰减减小主要并非雾本射的贡献，而是出现雾时的“大气环境”造成的。无论如何，自然条件下的雾与实验室条件下的人工雾不可同日而语，这一情况也正说明了为什么至今野外现场的测量数据很少，而主要研究在理论方面和实验室数据方面。

③ 分别参阅 Oswald W. Chem. Zbl. ，1908，1(1)：1104 和 Oswatitsch K. L. Physik，Zeit. ，1941，42：365。

得出每单位波长衰减对 $\omega\tau$ 的"钟形"依赖关系，$\omega\tau\approx 1$ 时，出现吸收极大值。但与实验比较，只表现出定性地相符，他认为困难在于难以快速而精确地确定雾滴参量，虽然做了不少努力这一困难未能有效克服。

5.5.2　基本分析：质量转移过程

假定雾中声波的相速度为一复数，但其在低频和高频时的极限值均为实数；湿空气可看成是理想气体，因在相对湿度 100% 下水汽质量比空气质量小得多；雾滴之间的相互作用可忽略；在低频时，单位质量空气中所含雾滴数目不因声场出现而改变。

考虑含雾空气中的一维平面声波，用类似于第 2 章第 2.1 节中的处理，可由流体动力学基本方程组得到关于含雾空气中压力、密度和湿度"相对"起伏的方程①：

$$\partial_t^2 p' - \frac{p_0}{\rho_0}\partial_x^2 p' = \partial_t^2 T' \tag{5.88}$$

为了得到关于 p' 和 T' 的第二个方程，可在低频极限下导出下列关系：

(a)雾滴"生长方程"

$$\mathrm{d}_t M_r = 4\pi r D \rho_{v0}(\rho'_v - p'_{vr} + T'_r - T') \tag{5.89}$$

其中 M_r 为单个雾滴质量，D 为水汽在空气中的扩散率；

(b)能量守恒要求：

$$L\mathrm{d}_t M_r = 4\pi r\kappa T_0(T'_r - T') + M_r c_w T_0 \partial_t T'_r \tag{5.90}$$

以及

$$4\pi r\kappa T_0(T'_r - T')\frac{n_0}{\rho_0} = c_p T_0 \partial_t T' - (c_p - c_v) T_0 \partial_t p' \tag{5.91}$$

其中，L 为雾滴蒸发热，c_w 为水的比热容，n_0 为无声场时雾滴数密度；

(c)水从液态到气态，量的变化之间的关系表明

$$\mathrm{d}_t M_r = \frac{\rho_0 m_v p_{v0}}{n_0 m p_0}(\partial_t p' - \partial_t p'_v) \tag{5.92}$$

以及

$$\partial_t p'_{vr} = \frac{T_0}{p_{v0}}(\partial_T - \rho_v)_0 \partial_t T'_r \tag{5.93}$$

其中 m 表示分子量，由(5.88)式～(5.93)式可导出所要求的第二个方程：

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}(1+\lambda_s\lambda_D - \lambda_f\lambda_D)\partial_t^2 p' + \omega^*\left(\lambda_f + \frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\partial_t p' \tag{5.94}$$

① 下标 0 表示未受声场扰动的量，撇号表示受声场扰动后的相对起伏量，如 $p'=(p-p_0)/p_0$ 等等；下标 a 表示对应于干空气的量、下标 v 对应于水汽、下标 m 对应于空气与水汽的混合物、下标 r 对应于雾滴表面(r=雾滴半径)。

$$=(1+\lambda_s\lambda_D-\lambda_f\lambda_D)\partial_t^2 T'+\omega^*(1-\lambda)\partial_t T'$$

其中

$$\omega^* \equiv 4\pi D n_0 r \tag{5.95}$$

为对应于质量转移过程的弛豫频率，其倒数

$$\tau_c \equiv 1/\omega^* = \rho_{w0} r^2/3D\rho_{a0} g_{w0} \tag{5.96}$$

为相应的弛豫时间，其中 g_{w0} 为单位体积内含水量与空气质量之比；而各 λ 的定义为

$$\begin{aligned}
\lambda_D &= c_p\rho_0(D/\kappa)\\
\lambda_f &= (L/c_pT_0)(\rho_{v0}/\rho_0)\\
\lambda_s &= \frac{L\rho_{v0}}{c_p p_{v0}\rho_0}(\partial_T p_w)_0
\end{aligned} \tag{5.97}$$

它们或多或少随 p 和 T 而变。由方程(5.88)和(5.94)具有 p' 和 T' 形如 $e^{-i\omega(t-x/v_\infty)}$ 的共同解的条件，声波在雾中的相速度 V 可用各 λ 和 ω^* 等表出，其极限值为

$$\begin{aligned}
V_0^2 &= \lim_{\omega\to 0} V^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}\frac{1+\lambda_s}{1+\gamma(\lambda_s-\lambda_f)}\\
V_\infty^2 &= \lim_{\omega\to\infty} V^2 = \gamma\frac{p^0}{\rho_0}
\end{aligned} \tag{5.98}$$

每单位距离、单位时间和每波长的衰弱减分别为

$$\begin{aligned}
\alpha_F^d &= \frac{\omega}{\mathrm{Re}V}\tan\varphi,\\
\alpha_F^t &= \mathrm{Re}V\alpha_F^d = \omega\tan\varphi,\\
\alpha_F^\lambda &= 2\pi\tan\varphi
\end{aligned} \tag{5.99}$$

其中 $\mathrm{Re}V$ 为 V 的实部，而

$$\tan\varphi=\left\{\left(1-\frac{V_0}{V_\infty}\right)^2\left[\left(\frac{V_0}{V_\infty}\right)^2+(\omega\tau_c)^2\left(\frac{1+\lambda_D\lambda_s-\lambda_D\lambda_f}{1+\gamma(\lambda_s-\lambda_f)}\right)^2\right]^{-1}\right\}\omega\tau_c\frac{1+\lambda_D\lambda_s-\lambda_D\lambda_f}{1+\gamma(\lambda_s-\lambda_f)}$$

它可以写成类似于分子吸收的形式[比较，例如(5.45′)式]：

$$\alpha_F^\lambda = 2\pi\frac{\omega\tau_c}{1+(\omega\tau_c)^2}J(p,T) \tag{5.100}$$

在 $\omega\tau_c\approx 1$ 时取极大值。在正常大气压下，J 为一强烈依赖于 T 的复函数，举例来说，当 0℃时，$J\approx 0.15$，而当 21℃时，$J\approx 0.22$。

5.5.3 进一步的分析

在文献[147]中以同样的物理模型考虑了三种弛豫过程(除质量转移之外还包括动量和热的转移)，所得结果基本上与小节中魏荣爵关于质量转移的结果一致。

正如在第 1 小节中提到过的，Davidson 在文献[149]中指出，文献[147]作了不正确的忽略，他将能量方程写为

$$\rho_m \partial_t e_m + \rho_m u_m \partial_x e_m = -p_m \partial_x u_m + 4\pi n \kappa r(T_r - T_m) + 6\pi \eta n r(u_r - u_m)^2 - n\, d_t M_r \left[\frac{1}{2}(u_r - u_m)^2 + h_r - e_v\right] \quad (5.101)$$

其中 e 为比内能，η 为空气黏性系数，u 为粒子速度，h 为水汽比焓；下标的含义如前，略去二阶项后有

$$\rho_m \partial_t e_m = -p_m \partial_x u_m + 4\pi n_0 \kappa r(T_r - T_m) - (c_{p,v} - c_{v,v}) n_0\, d_t M_r T \quad (5.101')$$

将质量守恒方程

$$-n_0\, d_t M_r = \partial_t \rho_m + \rho_m \partial_x u_m \quad (5.102)$$

代人后得

$$\rho_m \partial_t e_m = -p_m \partial_x u_m + 4\pi n_0 \kappa r(T_r - T_m) + (\partial_t \rho_m + \rho_m \partial_x u_m) R_v T \quad (5.103)$$

其中 R_v 为水汽单位质量气体常数。混合物和水汽的状态方程分别为

$$p_m = \rho_m R_m T, \quad p_v = \rho_v R_v T$$

故有

$$p_v = p_m \frac{\rho_v R_v}{\rho_m R_m} = p_m \frac{\rho_v m_m}{\rho_m m_v} \quad (5.104)$$

再考虑到连续性方程 $\partial_x u = \frac{1}{\rho_0} \partial_t \rho_a$，于是能量方程(5.103)成为

$$\rho_m \partial_t e_m = \left(1 - \frac{m_m}{m_v}\right) \frac{p_m}{p_{a0}} \partial_t \rho_a + 4\pi m_0 \kappa (T_r - T_m) + \frac{p_m m_m}{\rho_m m_v} \partial_t p_m \quad (5.103')$$

如忽略空气—水汽混合物与水汽之间的差异，并将所有的量用相应的空气量来近似，则(5.103′)式即化为(5.91)式，由于 $m_m \approx 28.8$，$m_v \approx 18$，故(5.103′)式右端第一项和第三项分别约为 $-0.6(p_m/\rho_m)\partial_t \rho_m$ 和 $1.6(p_m/\rho_m)\partial_t \rho_m$。它们为同数量级因而哪一项也不能忽略。

Davidson 在文献[150]中又更进一步引进 Burgers 方程来解决这一问题，首先他在上述三个守恒方程中略去三阶和高阶项，然后用非线性声学中常用的手法导出关于各个转移弛豫过程的普遍方程，最后得到由三种转移过程引起的单位波长总吸声系数

$$\frac{\alpha \lambda}{2\pi} = \sigma B(\gamma A)^{-1} \frac{\omega \tau_c}{1 + (\omega \tau_c)^2} + g_{w0} \left[\frac{\omega \tau_D}{1 + (\omega \tau_D)^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{c_w}{c_{v,m}} \frac{\omega \tau_T}{A^2 + (\omega \tau_T)^2}\right] \quad (5.105)$$

其中 σ 为单位体积中水汽含量与空气含量之比，而

$$A \equiv 1 + \sigma L(L - 1)(\gamma_v - 1) \frac{c_{v,v}}{c_{v,m}}$$

$$B = [(\gamma-1)(L-1)-1]\left[(\gamma_v-1)(L-1)\frac{c_{v,v}}{c_{v,m}}-\frac{m_a}{m_v}\right] \tag{5.106}$$

由(5.96)式定义的 τ_c 和分别由以下两式定义的

$$\tau_D = 2\rho_{w0}r^2/9\eta, \quad \tau_T = \rho_{w0}c_w r^2/3\kappa \tag{5.107}$$

分别为质量转移、动量转移和能量转移弛豫时间。

为了与(5.100)式比较，可将(5.105)式中右端的第一项(对应于质量转移过程)写成形式

$$\alpha_F^\lambda = 2\pi\frac{\omega\tau_c}{1+(\omega\tau_c)^2}K(p,T)$$

在正常大气压和0℃以及21℃下，K 分别约等于0.11和0.14，比(5.100)式给出的分别小30%--35%，通常认为这一结果更符合观测结果。

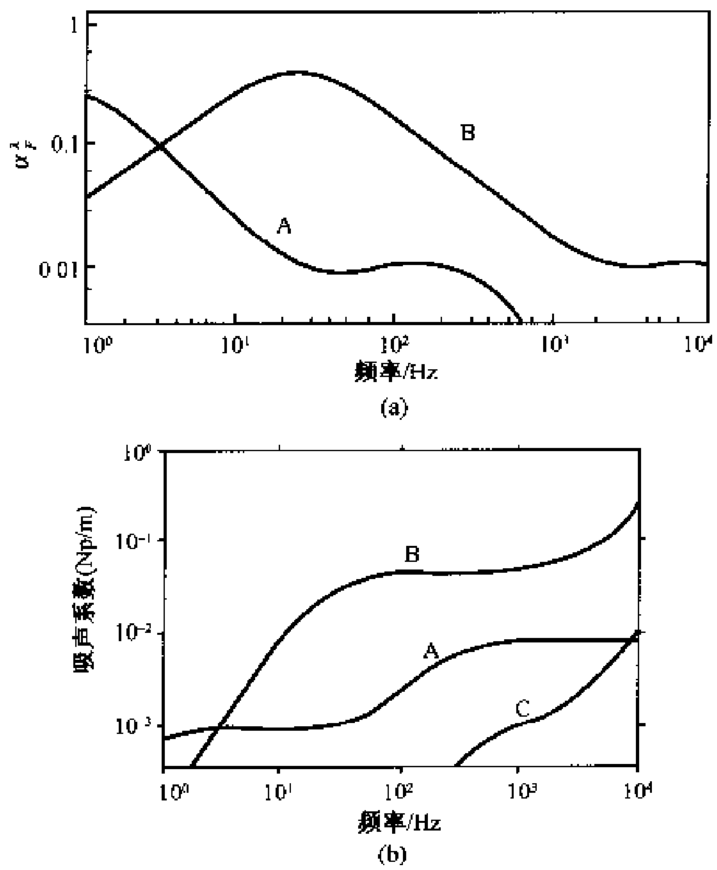


图36　雾中吸声系数对频率的依赖关系

(a) 每波长吸声系数；(b) 每单位距离吸声系数

$g_{w0}=1.5\times10^{-3}$；$r=8\mu m$(曲线A)，$1\mu m$(曲线B)；分子吸收(曲线C)

根据(5.105)式作出的 α_F^λ 对频率的关系曲线如图36(a)所示，可见有两个峰值，位于低频段的第一峰值系由质量转移引起，明显高于位于高频段的、由动

量转移引起的第二峰值;还可看到:对于较大雾滴($r=8\mu m$,曲线 A)第一峰值位于次声频,而对于较小雾滴($r=1\mu m$,曲线 B)该峰值位于低可听声频。这表明:当雾滴半径减小时,质量转移过程移向较高频段而在此频段内的声吸收显著增大。

图 36(b)示出单位距离的吸声系数 α_F^d。可看出,吸声以同一量级反比于波长的减小而增加,此为上述结论的必然结果。为了比较,在同一图上还示出了分子吸收(曲线 C)。

第 6 章　重力场和地球自转的影响

地球表面的大气层始终处于重力场和地球自转的作用之下，其中的波动作为流体运动的特殊形式自然也就逃不脱它们的影响。可是在一般情况下，对于可听声频段的声波和频率较高的次声波（就更不用说超声波了），这种影响完全可以忽略，因为波动中的运动加速度与频率的平方成正比，在上述频段中这一加速度在数值上远大于重力加速度 g。但当频率低到一定程度，例如，其数量级为 g/c 时，则两个加速度就属于同一量级了。

实际上，因重力作用，大气密度随高度的增加而指数性地减小。对于频率为 $g/c\approx0.029$Hz 的声波，其波长约为 $c^2/g\approx12$km，在这一波长范围内的铅直高度上，密度已发生显著变化。当稳定的大气受到这种声波扰动时，某部分气团从较轻的上层被压向较重的下层，从而受到浮力作用而要返回其原在水平面，并且由于惯性还会超出这一水平面。由此可见，在寻常声波赖以传播的介质压缩性恢复力之外，密度的"分层不均匀性"又提供了另一种恢复力——浮力（实即重力）。正如在第 1 章第 3.3 节中所提到过的那样，在这种浮力作用下，大气存在着一种被称为浮力频率或 Väisälä-Brunt（简称 V-B）频率（(1.28)式）的固有振荡频率，它们通常是高度的函数，量值在 0.01～0.025Hz 之间变化。

上述这种既要考虑重力同时仍然保留着弹性恢复力影响的波，既具备寻常声波的性质，又具备某些重力波特征（例如，由于重力总是指向一个方向而呈现各向异性），因而得名为"声重力波（AGW）"。

随着频率的继续降低，浮力的作用会越来越大，而原来居主导地位的弹性恢复力的作用相对越来越小，直到可以忽略不计。也就是说，在这种频率（约为 V-B 频率的 1/10，即约 0.003Hz 附近）下，大气可看成是"不可压缩的"，而相应出现的波称为"内重力波（IGW）"。它的机制完全类似于通常存在于不可压缩流体表面的（外）重力波，只是它并非存在于两种不同介质的分界面上，而是存在于密度连续分层变化的同一介质的内部。

除重力以外，地球本身的曲率和自转也会对波动产生影响。地面上任何物体（当然包括振动中的空气粒子）相对于地球运动时，只要其相对速度方向不与地轴平行，都会受到 Coriolis 加速度 $2\boldsymbol{\Omega}_E\times\boldsymbol{v}$ 的影响（(1.43)式中第二项），该加速度的方向垂直于 $\boldsymbol{\Omega}_E$ 和 $\boldsymbol{v}$ 所决定的平面而大小 $2\Omega_E v\sin\theta$ 则随纬度（角）θ 而变化。正是这一随纬度变化的 Coriolis 效应形成了又一外力场，导致一种波长非常之长（达数千千米）的水平横波：其粒子振动方向与传播方向同在水平面内且相互垂直，这就

是行星波或依其发现者而被命名为 Rossby 波。这种波在大气中建立起高压与低压相间分布的波状系统。

与海洋类似，大气中也同样会出现“大气潮”，但与主要由月球引力产生的海潮不同，大气潮主要是由太阳的热效应引起的，而月球和太阳的引力效应对大气来说相对较小，从而大气潮的周期就是太阳日的约数，即 $24/m$ 小时（$m=1,2,3,\cdots$）。

行星波和大气潮从本质上讲已不属于声波范畴（严格来说，其实内重力波就已经不是了），虽然它们作为大气中的重要波动形式应在“广义”的大气声学中占有一席之地，但终究不是主要研究对象，反之，它们在气象学中具有重要意义。

以下基本上按文献[32]中的体系来讨论考虑到重力场和地球自转时大气波的理论。

6.1 静止大气中的波系

6.1.1 基本方程组和频散关系

像在第 2 章中所做的那样，仍从流体动力学的三个基本方程出发，在计及重力的情况下，Euler 方程(1.30a)的右端应添加重力加速度 $\boldsymbol{g}$，以声波微扰量(2.1)式代入，进行线性化处理并考虑到流体静力方程(1.13)后，即得到

$$\rho_0 \partial_t \boldsymbol{v} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g} \tag{6.1}$$

像以前一样，这里带下标 0 的量表示未受扰动的量，而不带下标（实为下标 1 已被省略）的量表示受扰动后的微扰量。对连续性方程(1.31′)和状态方程(1.32)进行同样处理后分别得到

$$\partial_t \rho + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{6.2}$$

$$\partial_t p + \boldsymbol{v} \cdot \nabla p_0 = c^2 (\partial_t \rho + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho_0) \tag{6.3}$$

将坐标系选取得使其 x 轴指向波传播方向而 z 轴指向铅直方向，就可将上述方程组按坐标分量写出：

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_0 \partial_t v_x = -\partial_x p \\
&\rho_0 \partial_t v_z = -\partial_z p - g\rho \\
&\partial_t \rho - \frac{\rho_0}{H} v_z + \rho_0 (\partial_x v_x + \partial_z v_z) = 0 \\
&\partial_t p - \rho_0 g v_z = c^2 \left(\partial_t \rho - \frac{\rho_0}{H} v_z \right)
\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

在最后一式中再次利用了(1.13)式而在最后二式中利用了 Halley 定律(1.15)，其中 H 为(1.16a)式所定义的标高。

其实在上面已引入等温大气的假定，更严格地说，应为恒定标高（即 H 不随高度变化）大气，否则 Halley 定律不能成立。现在进一步假定各微扰量按正弦式变

化(平面波解),即v、p、ρ等均可表为形式$\exp[\mathrm{i}(k_x x+k_z z-\omega t)]$,这里$k_x$、$k_z$均为复波数,以计及衰减或增长。这样方程组(6.4)便化为四个变量v_x,v_z,ρ/ρ_0和p/p_0的四个代数方程,以矩阵形式表出即为

$$\begin{bmatrix} -\mathrm{i}\omega & 0 & 0 & \mathrm{i}k_x gH \\ 0 & -\mathrm{i}\omega & g & g+\mathrm{i}k_z gH \\ \mathrm{i}k_x & -\dfrac{1}{H}+\mathrm{i}k_z & -\mathrm{i}\omega & 0 \\ 0 & \dfrac{\gamma-1}{H} & \mathrm{i}\omega\gamma & -\mathrm{i}\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_z \\ \dfrac{\rho}{\rho_0} \\ \dfrac{p}{p_0} \end{bmatrix} = 0 \tag{6.5}$$

在其中利用了(1.17)式和(1.16a)式以将p_0/ρ_0表为$c^2/\gamma=gH$。为使(6.5)式有非无效解,其特征列式必须为0,由此得到重要的频散关系

$$\omega^4-\omega^2c^2(k_x^2+k_z^2)+(\gamma-1)g^2k_x^2+\mathrm{i}\omega^2\gamma gk_z=0 \tag{6.6}$$

对上式的分析表明:k_x和k_z不可能同时是非零的纯实数,即波振幅的衰减或增长不是在铅直方向发生就必然在水平方向发生。现为确定并简单起见,假定振幅在水平方向没有变化,那么k_x就应为纯实数。于是(6.6)式可分为实、虚两部分:

$$\omega^4-\omega^2c^2[k_x^2+(\mathrm{Re}k_z)^2-(\mathrm{Im}k_z)^2]-\omega^2\gamma g(\mathrm{Im}k_z)+(\gamma-1)g^2k_x^2=0 \tag{6.6a}$$

$$\omega^2\gamma g(\mathrm{Re}k_z)-2\omega^2c^2(\mathrm{Re}k_z)(\mathrm{Im}k_z)=0 \tag{6.6b}$$

因此,在$\omega\neq0$的条件下,或者

$$\mathrm{Re}k_z=0 \tag{6.7a}$$

意即铅直波数为一纯虚数;或者

$$\mathrm{Im}k_z=\frac{\gamma g}{2c^2}=\frac{1}{2H} \tag{6.7b}$$

第一种选择(6.7a)式意味着波在铅直方向没有相位变化,而只有随高度的指数性增幅或衰减,这正是表面波和消散波(evanescent wave)的特征:表面波是其能量集中于界面或某一参量的不连续面上的波,其振幅具有指数性变化;渐消波则可不依赖于界面而存在,可以在大块流体介质内部传播,因面有时称为体波。表面波和渐消波二者合称为"外波",它们与"内波"相反的最大特点是没有铅直方向相位变化。

6.1.2　内波

频散关系(6.6)式为ω的四次方程,而当(6.7b)式成立时①方程组(6.5)就有四个独立解。由于(6.6)式含有三个变量(ω,k_x,k_z),就可分别作出三个图来说明彼此之间的关系。图37(a)~(c)依次给出k_x,k_z和ω分别为常数时其余两个量之

① 如上所述,这种情形就对应于"内波"。

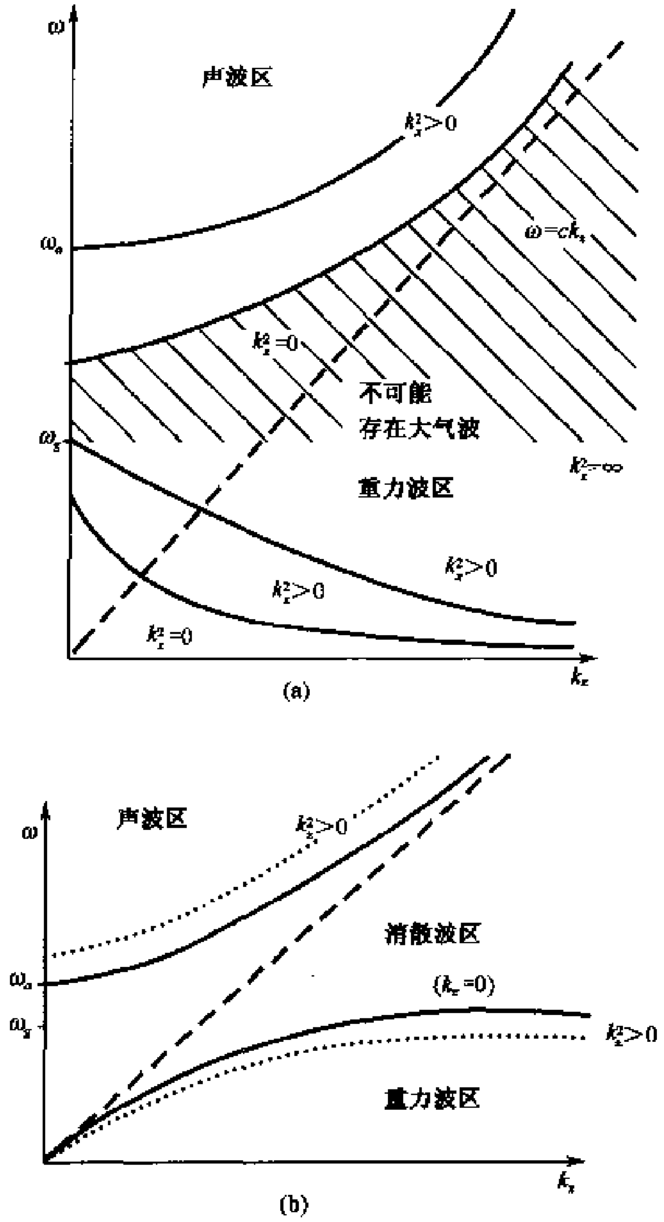
间的关系曲线(频散图),最后一个图(给定 ω 值时 k_x 与 k_z 间的关系图)以传播曲面图著称[154]。

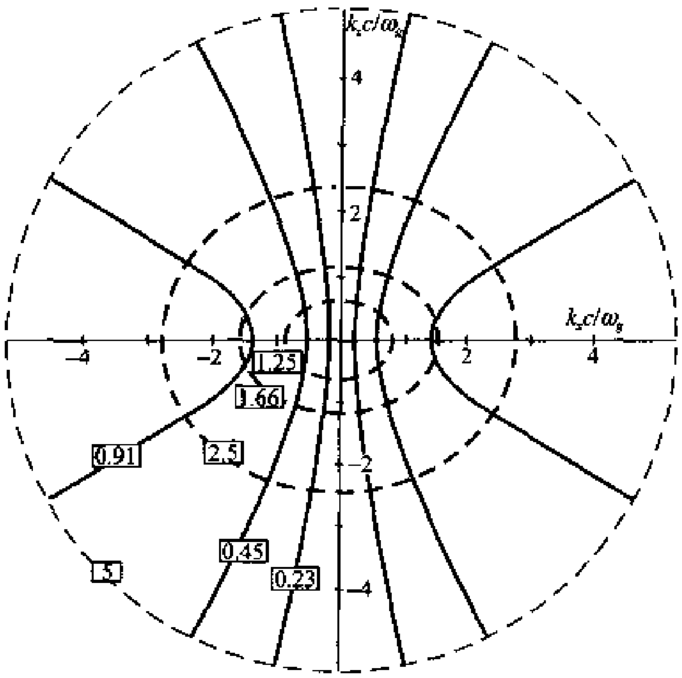
在各个频散图中都存在着两个截然不同的内波范围:一个包含着频率大于

$$\omega_a = \frac{\gamma g}{2c} = \frac{c}{2H} \tag{6.8}$$

的波,这里 ω_a 以"声截止频率"著称,而 $\omega > \omega_a$ 的波即可认定为声波;另一个范围包含着频率以(1.28b)式所给出的等温 V-B 频率 ω_g 为上限的低频波,这些低频率、长周期波即为大气内重力波。上面提到的四个解对应于在相反方向传播的上述两种类型的波。介于两个范围之间的是以声速水平传播的 Lamb 波。

在内波情形下(这时(6.7b)式成立并且 $\mathrm{Re}k_z \neq 0$),频散关系(6.6a)可用 ω_a 和





(c)

图 37　等温大气中波的频散图

(a)k_x=const;(b)k_z=const;(c)ω=const,方框内数字为比值 ω/ω_g

虚线表示声波,实线表示内重力波

ω_g 表出为

$$k_z^2=\left[\left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^2-1\right]k_x^2+\frac{1}{c^2}(\omega^2-\omega_a^2) \tag{6.6a'}$$

或

$$k_x^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left[\frac{\omega^2-\omega_a^2-c^2k_z^2}{\omega^2-\omega_g^2}\right] \tag{6.6a''}$$

这里的 k_x 和 k_z 均表示相应波数的实数部分。

如令

$$l^2=\left(\frac{\omega^2-\omega_a^2}{\omega^2-\omega_g^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2},\quad m^2=\frac{\omega^2-\omega_a^2}{c^2}$$

则(6.6a′)可写成圆锥曲线方程形式

$$\frac{k_x^2}{l^2}+\frac{k_z^2}{m^2}=1$$

在实际大气中 $\gamma<2$;在高度 200km 以下双原子气体 N_2 和 O_2 占优势,所以 $\gamma=1.4$;在高度 400km 以上则单原子气体占优势,因而 $\gamma=1.67$。因此 ω_a 总是大于 ω_g。

传播曲面图示于图 37(c)中,对于声波分支,$\omega>\omega_a$ 从而 l^2 和 m^2 均>0,故曲

面为椭球面(图中虚线),其长轴 $l=\frac{\omega}{c}[(\omega^2-\omega_a^2)/(\omega^2-\omega_g^2)]^{1/2}$在水平方向而短轴 $m=\frac{1}{c}[\omega^2-\omega_a^2]^{1/2}$在铅直方向,从而所对应的波是各向异性的所谓声重力波,其相速度总是大于声速 c。对于 $\omega\to\infty$的极限情形,(6.6a′)简化为 $k_x^2+k_z^2=k^2=\omega^2/c^2$,这就是各向同性的寻常声波。

对于内重力波分支,$\omega<\omega_g<\omega_a$ 从而 $l^2>0$ 而 $m^2<c$,故曲面为绕铅直轴的旋转双曲面(图中实线),它同水平轴相交于$\frac{\omega}{c}[(\omega_a^2-\omega^2)/(\omega_g^2-\omega^2)]^{1/2}$。在重力波中,$k$ 总是大于ω/c,而相速度总是小于声速 c。

6.1.3 相速度和群速度

上面提到了声波和内重力波的相速度,现在利用图 37(a)和(b)上的频散图来进一步分析铅直和水平方向的相速度和群速度。从图 37(a)可看出,对于重力波,铅直方向的相速度与群速度方向相反:如铅直相速度 $V_{Pz}=\omega/k_z>0$,则铅直群速度 $V_{Gz}=\partial\omega/\partial k_z<0$;反之如 $V_{Pz}<0$ 而 $V_{Gz}>0$。这是内重力波的一个重要特征;但对于水平方向的重力波,二者在同一方向。

群速度代表能流方向(除了在高度频散的介质中以外),而相速度为所观察到的波峰-波谷的运动速度。因此,如果维持内重力波的能量是由下向上传播的,那么观察到的波本身就表现出从上向下的运动。看来以此可以解释熟知的行进电离层扰动(TID)的向下漂移;由低层大气发射的内重力波,其能流向上传递直达电离层,由于大气密度随高度的增加而减小,根据能流的连续性,波的振幅势必随高度而增加。于是在 60km 以上的高空,风的剖面几乎完全由这种大振幅、长周期的波动所支配。这种风使电离层重新分布,而形成所观察到的以波的相速度移动的电离层不规则性。对这种不规则性的雷达观测表明电离层向下漂移。

利用频散关系(6.6)可以算出相速度和群速度,其中水平相速度直接由(6.6a″)式求出:

$$V_{Px}=c\left[\frac{\omega^2-\omega_g^2}{\omega^2-\omega_a^2-c^2k_z^2}\right]^{1/2} \tag{6.9}$$

而水平群速度为

$$V_{Gx}=c\frac{(\omega^2-\omega_g^2)^{3/2}(\omega^2-\omega_a^2-c^2k_z^2)^{1/2}}{\omega^4+\omega_g^2(\omega_a^2+c^2k_z^2-2\omega^2)}=\frac{c^2(\omega^2-\omega_g^2)V_{Px}}{\omega^2V_{Px}^2-c^2\omega_g^2} \tag{6.10}$$

铅直方向的相速度和群速度的公式也可类似地求得。所得出的重要结论是:对于重力波,已如上所述,即相速度与群速度方向相反;对于声波,则二者同向,但群速度决不会超过相速度。

从(6.9)式和(6.10)式可看出,对于重力波,水平相速度和群速度总是均小于声

速。当 $\omega\to\infty$ 时二者趋于同一极限值 $V_{Px}^{m}=V_{Gx}^{m}=[\omega_g/(\omega_a^2+c^2k_z^2)^{1/2}]c$。因此,在等温大气中,频率非常之低的重力波以低于 0.9c 的相速度和群速度移动。

对于声波,在高频极限下,V_{Px} 和 V_{Gx} 二者均趋于声速,这正是所预期的。但当 $\omega\to\omega_a$ 时,二者均与 k_z 有关;$V_{Px}\to\infty$ 而 $V_{Gx}\to 0$。图 38 示出速度-频率平面内不同的速度域[31]。

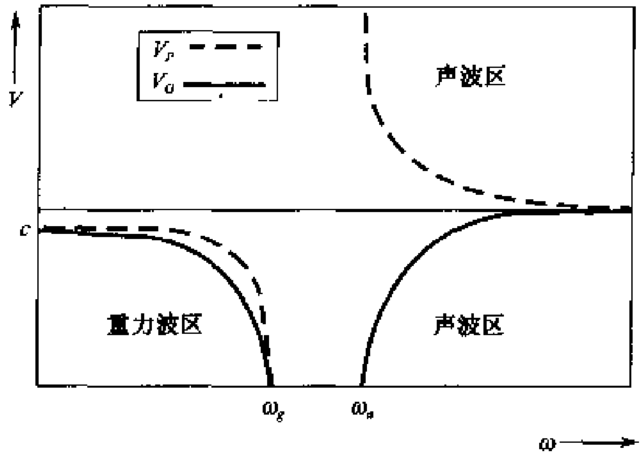


图 38　(V,ω) 平面上的群速度和相速度

真实的相速度 V_P 可用迹速度 V_{Px} 和 V_{Pz} 表示为

$$\frac{1}{V_P^2}=\frac{1}{V_{Px}^2}+\frac{1}{V_{Pz}^2} \tag{6.11}$$

如图 39 所示,V_{Pz} 和 V_{Px} 并非 V_P 真正的分量,由于 $k^2=k_x^2+k_z^2$,相应的波长关系为

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda_x^2}+\frac{1}{\lambda_z^2} \tag{6.11'}$$

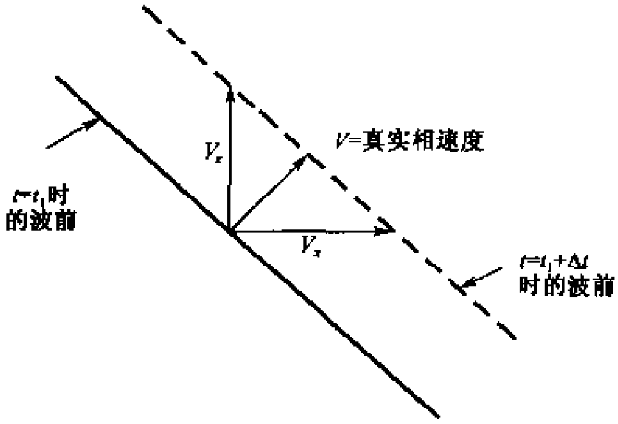


图 39　迹速度与真实相速度之间的关系

关系式(6.11)和(6.11′)在分析微气压记录时特别重要。一般利用"三点阵"来接收大气波，相关记录的时间延迟得出水平迹速度，利用形式如(6.11)式的关系式可将两个速度结合起来以求得 V_P。

6.2　运动不均匀大气中的波

6.2.1　基本方程组及其处理步骤

现在进一步计入风的影响，同时计入大气的分层不均匀性。为简单起见，假定风为水平方向的恒定运动，即 $|\boldsymbol{v}_0|=v_{0x}=\text{const}$。重复本章第 1.1 节所做的，代替(6.4)式，现在的基本方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_0 D_t^0 v_x = -\partial_x p \\
&\rho_0 D_t^0 v_z = -\partial_z p - g\rho \\
&D_t^0 \rho + (\partial_z \rho_0) v_z + \rho_0(\partial_x v_x + \partial_z v_z) = 0 \\
&D_t^0 p + (\partial_z p_0) v_z = c^2[D_t^0 \rho + (\partial_z \rho_0) v_z]
\end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

除以算符 $D_t^0 \equiv \partial_t + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla = \partial_t + v_{0x}\partial_x$（即在(1.29)式中令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$ 而得）取代(6.4)式中的简单时间微商 ∂_t 以外，还由于已不再是等温大气因而(1.13)式和(1.15)式均不再能利用。

利用理想气体状态方程(1.7)，可得

$$\partial_z\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{1}{p_0}\partial_z p + \frac{g\rho_0}{p_0^2}p = \frac{1}{p_0}\partial_z p + \frac{gM}{p_0 RT}p$$

而在分层不均匀性和 M 与 R 保持常值的假定下，有

$$\frac{1}{\rho_0}\partial_z \rho_0 = -\frac{gM}{RT} - \frac{T'}{T}$$

在这里和以后撇号均表示对 z 的微商，于是(6.12)式即可改写为

$$\left.\begin{aligned}
&D_t^0 v_x = -\frac{RT}{M}\partial_x\left(\frac{p}{p_0}\right) \\
&D_t^0 v_z = -\frac{RT}{M}\partial_z\left(\frac{p}{p_0}\right) - g\left(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{p}{p_0}\right) \\
&D_t^0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + \partial_x v_x + \partial_z v_z - \left(\frac{gM}{RT} + \frac{T'}{T}\right)v_z = 0 \\
&D_t^0\left(\frac{p}{p_0}\right) + \gamma(\partial_x v_x + \partial_z v_z) - \frac{gM}{RT}v_z = 0
\end{aligned}\right\} \tag{6.12′}$$

在推出第四式时利用了第三式。

接下去不能按第 1.1 节中的步骤像对等温大气所做的那样从方程组(6.12′)得出相应的矩阵形式的线性化方程组。如果硬要这样做，就会得出矛盾的结果：一

方面是相当于标高 H 为常数这一假定下的方程；另一方面又包含着不为零的 T' 项。因此在求解方程组(6.12′)时，在处理中应特别注意保留各个随高度变化的量的微商。于是得到四个二阶微分方程，或者，也可能将各参量用一组耦合的一阶微分方程表出。

仍像第 1.1 节中那样设各微扰量均按正弦式变化。以 v_z 为例，令

$$v_z = V(z)\exp[\mathrm{i}(k_x x - \omega t)] \tag{6.13}$$

于是

$$D_t^0 = \mathrm{i}(v_{0x}k_x - \omega) \equiv -\mathrm{i}\omega^* \tag{6.14}$$

这里定义的 Doppler 频移 $\omega^* \equiv \omega - v_{0x}k_x$ 也就是第 3 章第 5.2 节中所引进的禀性频率。仍然略去波在水平方向的振幅变化，因此 k_x 可按纯实数对待。而$\partial_x = \mathrm{i}k_x$ 也是一线性算符。

求出关于 v_z 的微分方程的步骤如下：第一步由(6.12′)中第一式求出 p/p_0：

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\mathrm{i}}{Hgk_x}D_t^0 v_x \tag{6.15}$$

其中利用了关系式(1.17)和(1.16a)；第二步以上式代入(6.12′)中第四式而求得

$$\mathrm{i}\left[\gamma k_x + \frac{1}{Hgk_x}(D_t^0)^2\right]v_x = \left(\frac{1}{H} - \gamma\partial_z\right)v_z \tag{6.16}$$

第三步以(6.15)式代入(6.12′)中第二式而求得

$$D_t^0 v_z = -g\frac{\rho}{\rho^0} + (1 - H\partial_z)\frac{\mathrm{i}}{Hk_x}D_t^0 v_x = -g\frac{\rho}{\rho^0} + \frac{\mathrm{i}}{Hk_x}D_t^0 v_x - \frac{\mathrm{i}D_t^0}{k_x}\left(\partial_z v_x + \frac{H'}{H}v_x\right) \tag{6.17}$$

第四步，在(6.17)式与(6.12′)中第三式之间消去 ρ/ρ_0 而得

$$\mathrm{i}\left[\frac{(D_t^0)^2}{Hgk_x} - \frac{H'}{Hgk_x}(D_t^0)^2 + k_x - \frac{(D_t^0)^2}{gk_x}\partial_z\right]v_x = \left[\frac{(D_t^0)^2}{g} + \frac{1}{H} + \frac{T'}{T} - \partial_z\right]v_z \tag{6.18}$$

方程(6.16)和(6.18)组成一个一阶耦合微分方程组。为求解，以(6.16)式和它的微商代入(6.18)式而给出一关于 $V(z)$的全微分方程：

$$V'' - \frac{1}{H}\left[1 + \frac{k_x^2c^2}{k_x^2c^2 - \omega^{*2}}H'\right]V' + \left[\frac{k_x^2}{\omega^{*2}}\left\{\frac{(\gamma-1)g^2}{c^2} + \frac{g}{H}H'\right\} + \frac{\omega^{*2}}{c^2} - k_x^2 + \frac{k_x^2c^2}{k_x^2c^2 - \omega^{*2}}\frac{H'}{\gamma H^2}\right]V = 0 \tag{6.19}$$

类似方法可以用来得出关于 v_x、p/p_0 和 ρ/ρ_0 的、略较复杂的二阶微分方程。在等温大气的特殊情形下，所有这些方程都退化为同一个方程，例如，对于 $V(z)$ 有

$$V'' - \frac{1}{H}V' + \left[\frac{k_x^2}{\omega^{*2}}\omega_g^2 + \frac{\omega^{*2}}{c^2} - k_x^2\right]V = 0 \tag{6.19a}$$

现如设

$$V(z) = A_0 Z \exp(\mathrm{i}k_z z)$$

则(6.19a)式就可成为早先得到的频散关系(6.6),只是其中的 ω 现为 ω^* 所取代,这与我们最初的直觉预期一致。

6.2.2 向等温大气的过渡缓变大气

将(6.19)式写成更为普遍的形式

$$V'' + f(z)V' + r(z)V = 0 \tag{6.19'}$$

用标准变换

$$V = \bar{V}\exp\left[-\frac{1}{2}\int^z f(z)\mathrm{d}z\right]$$

可将其化为波动方程的通常形式

$$\bar{V}'' + q^2\bar{V} = 0$$

其中

$$q^2 = r - \frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{2}f' \tag{6.20}$$

当 $q^2>0$ 时 $\bar{V}$ 有一振荡型解而当 $q^2<0$ 时有一指数型或双曲型解。在某种保留[①]下参量 q 可理解为波数的铅直分量。

对照(6.19)式和(6.19′)式即可看出,后者中的 $f(z)$ 项是由于大气密度的变化而产生的。未受扰动的大气压具有如(1.14)式的简单形式,但对于密度,在非等温情形下可设为略为不同的形式(比较等温情形下的(1.15)式):

$$\rho_0(z) = (\rho_0 H)_{z=0}\frac{1}{H}\exp\left\{-\int_0^z\frac{\mathrm{d}z}{H}\right\} \tag{6.21}$$

事实上 $f(z)$ 可写成如下形式:

$$f(z) = \mathrm{d}_z\ln\left(\frac{\rho}{b^2}\right) \tag{6.22}$$

其中 $b^2 \equiv \omega^{*2}/c^2 - k_x^2$,而 $r(z)$ 可写成

$$r(z) = b^2 - \frac{k_x^2 g}{\omega^{*2}}\left(f(z) + \frac{g}{c^2}\right) \tag{6.23}$$

设大气性质变化很慢,以致 H'^2 和 H''均可忽略而铅直波数仍可作为常数处理。在这种情况下,就可以利用内波的"等温"频散关系(6.6),只须在其中以缓变大气的各有关量 ω^*,ω_B 和 ω_{an} 分别取代等温大气的相应量 ω,ω_g 和 ω_a。这里的 ω_B 以(1.28a′)与 ω_g 相联系,而 ω_{an} 为非等温情形下的声波截止频率。将(6.20)重写为

---

① 之所以有保留是因为按此步骤对 v_x,v_z,p/p_0 和 ρ/ρ_0 等每个参量都会得到不同的铅直波数。

$$q^2 = r_0 + \Delta - \frac{\omega_{an}^2}{c^2} \tag{6.20'}$$

其中

$$r_0 = r - \Delta$$

$$\Delta = \frac{k_x^2 c^2}{k_x^2 c^2 - \omega^{*2}} \frac{H'}{\gamma H^2}$$

由于当 $k_x \to 0$ 时 $\Delta \to 0$ 并且 H 的高阶微商可以略去，所以

$$\omega_{an}^2 = \frac{c^2}{4} f^2 + \frac{c^2}{2} f' = \frac{c^2}{4H^2} H' = \omega_a^2 + \frac{\gamma g}{2T} T'$$

由上述取代可看出：与等温大气不同，在非等温大气中，V-B 频率有可能高于声波截止频率。ω_B 和 ω_{an} 的定义表明，发生这种情况的条件是

$$T' > \frac{2-\gamma}{2\gamma} \frac{gM}{R}$$

以 $M=29$ 和 $\gamma=7/5$ 的值代入，可见当温度梯度 T' 超过 7.3K/km 时 ω_B 即超过 ω_{an}。这一温度梯度值提供了所谓"缓变大气"的粗略判据。如 $T'>7.3$K/km，则大气不再是缓变的而必须寻求微分方程组更精确的解。

6.2.3　速度散度方程

代替上面第二小节中求出描述铅直速度分量 v_z 的微分方程，求出描述速度散度的微分方程常常更为有利，特别在气学的应用中更为明显。按定义，速度散度为

$$\chi = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \partial_x v_x + \partial_z v_z \tag{6.24}$$

再引进速度旋度$\nabla \times \boldsymbol{v}$ 的 y 分量

$$\zeta_y = \partial_z v_x - \partial_x v_z, \tag{6.25}$$

则可将二维 Laplace 算符作用后的$\nabla^2 v_z$ 写成

$$\nabla^2 v_z = \partial_x^2 v_z + \partial_z^2 v_z = \partial_z \chi - \partial_x \zeta_y$$

在等温大气情况下可以将方程组(6.12′)写成矩阵形式

$$D_t^0 \boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{M}_B \boldsymbol{M}_A \tag{6.26}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_A \equiv \begin{bmatrix} \chi \\ \zeta_y \\ \dfrac{\rho}{\rho_0} - \dfrac{p_1}{p_0} \\ \dfrac{RT}{M} \nabla^2 \left(\dfrac{p}{p_0}\right) \end{bmatrix},$$

$$M_B \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & g\partial_z & -1 \\ 0 & 0 & g\partial_x & 0 \\ \gamma-1 & 0 & 0 & 0 \\ g\partial_z - \dfrac{\gamma RT}{M}\nabla^2 & -g\partial_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

频散关系即可由此求出。在非等温情况下，关于 χ 的微分方程也可用与上小节中相同的方法求得。

在文献[155]中在 χ 按周期性变化和无风的假定下求出这一方程为

$$\partial_z^2\chi - \frac{1-H'}{H}\partial_z\chi + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 + \frac{k_x^2}{\omega^2}\left(\frac{gH'}{H} + \frac{(\gamma-1)g^2}{c^2}\right)\right]\chi = 0 \tag{6.28}$$

以与上两小节中几乎同样的方式处理有关方程组，在文献[156]中将(6.28)式推广到计入风和温度具有任意铅直变化的情形。并证明 v_x，v_z 和 p/p_0 以下列关系与速度散度相联系

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{i}G}{k_x c^2}v_x &= \left(\omega^{*2} - \frac{g}{H} + \frac{gH'}{H}\right)\chi + g\partial_z\chi \\ \frac{G}{c^2}v_z &= \left(k_x^2 g - \frac{\omega^{*2}}{H} + k_x\omega^*\partial_z v_x\right)\omega^{*2}\partial_z\chi \\ \frac{\mathrm{i}G}{\gamma\omega^*}\frac{p}{p_0} &= \left(\omega^{*2} - \frac{g}{H} + \frac{gH'}{H}\right)\chi + g\partial_z\chi \end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

其中

$$G \equiv k_x^2 g^2 + (gk_x\partial_z v_x - \omega^{*3})\omega^* - \frac{\omega^{*2}gH'}{H} \tag{6.30}$$

6.2.4 能量密度和 Lagrange 密度

在第 2 章第 1.3 节中我们讨论过声波中的 Lagrange 密度，现在相应地讨论重力波情形。以前的许多结果可以用这种方法更简洁地得出。

引进波中粒子偏离其平衡位置的位移在直坐标系中的三个分量 ξ，η，ζ，亦即

$$v_x = \partial_t\xi, \quad v_y = \partial_t\eta, \quad v_z = \partial_t\zeta$$

则流体的体积增量或应变为

$$\varepsilon = \partial_x\xi + \partial_y\eta + \partial_z\zeta$$

于是重力波中的 Lagrange 密度为[157]（比较(2.28)式）

$$L = \frac{1}{2}\rho[(\partial_t\xi)^2 + (\partial_t\eta)^2 + (\partial_t\zeta)^2] - \frac{1}{2}\lambda\varepsilon^2 + \frac{1}{2}g\rho'\zeta^2 + \rho g\varepsilon\zeta \tag{6.31}$$

其中 $\lambda=\rho c^2$ 为容积弹性系数，它与(2.27)式中的压缩系数 κ 互为倒数。

(6.31)式中第一项仍然是动能密度，而其余各项代表标量势函数，从它们可以

推导出作用于流体上的保守力系；第二项代表弹性势能，第三项代表逐级不可压缩流体中的重力势能，最后一项代表与可压缩流体的位移相联系的势能。

因此，如将 Lagrange 运动方程(2.26)应用于 Lagrange 密度(6.31)，则得到

$$\left.\begin{aligned}&\rho\partial_t^2\xi-\partial_x(\lambda\varepsilon)+\rho g\partial_x\zeta=0\\&\rho\partial_t^2\eta-\partial_y(\lambda\varepsilon)+\rho g\partial_y\zeta=0\\&\rho\partial_t^2\zeta-\partial_z(\lambda\varepsilon)-\rho g(\partial_x\xi+\partial_y\eta)=0\end{aligned}\right\}\tag{6.32}$$

如假定 ρ 和 λ 都只是 z 的函数，则上述各个方程均为可分离的。对于水平平面波情形，可将 x 轴选定在运动方向，于是方程组(6.32)得到简化：第一个方程保持不变；第二个方程由于不存在 y 分量而消失；第三个方程中的$\partial_y\eta=0$。在文献[157]的附录中证明了这样得出的两个方程等价于 Euler 方程的一阶微扰形式。将方程以 Lagrange 形式表示出的主要优点在于它们无须引进热力学概念，并使每种类型波动中粒子的实际运动得以直接确定。设 ξ 和 ζ 都是指数函数$\exp[\mathrm{i}(k_xx-\omega t)]$，则简化后的方程组(6.32)成为

$$\left.\begin{aligned}&\rho\omega^2\xi-\lambda k_x^2\xi+\mathrm{i}k_x(\rho g\zeta-\lambda\zeta')=0\\&\rho\omega^2\zeta+\lambda'(\zeta'-\mathrm{i}k_x\xi)+\lambda(\zeta''-\mathrm{i}k_x\xi')-\mathrm{i}k_x\rho g\xi=0\end{aligned}\right\}\tag{6.33}$$

以 $\lambda=\rho c^2$ 代入(6.33)中第一式，给出

$$\xi=\mathrm{i}k_x\frac{c^2\zeta'-g\zeta}{\omega^2-k_x^2c^2}$$

这个联系 ξ 与 ζ 的式子与联系 v_x 与 v_z 的式子(6.16)完全相当，以之代入(6.33)中第二式，给出如下形式的关于 ζ 的二阶微分方程：

$$\zeta''+\left\{\mathrm{d}_z\ln\left(\frac{\rho}{b^2}\right)\right\}\zeta'+\left\{b^2-\frac{k_x^2}{\omega^2}g\mathrm{d}_z\ln\left(\frac{\rho}{b^2}\right)-\frac{k_x^2}{\omega^2}\frac{g^2}{c^2}\right\}\zeta=0\tag{6.34}$$

其中的 b^2 与(6.22)式中的一样，只是以 ω 取代了 ω^*。(6.34)式与(6.19)式相当。在等温大气中 $c=\text{const}$，因而 $\mathrm{d}_z(-\ln b^2)=0$，(6.34)式就成为

$$\zeta''+\{\mathrm{d}_z(\ln\rho)\}\zeta'+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2+\frac{k_x^2\omega_B^2}{\omega^2}\right)\zeta=0\tag{6.34a}$$

其中利用了 ω_B 的表示式(1.28)。令 $\zeta=h\rho^{-1/2}$，上式可被变换为波动方程：

$$h''+k_z^2h=0$$

其中

$$k_z^2=\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2+\frac{k_x^2}{\omega^2}\omega_B^2-\frac{1}{4}(\mathrm{d}_z\ln\rho)^2-\frac{1}{2}\mathrm{d}_z^2\ln\rho\tag{6.35}$$

如 ρ 为 z 的指数函数((1.15)式)，那么 ω_B^2 就是常数并且 $\mathrm{d}_z^2\ln\rho=0$，因而

$$k_z^2=\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2+\frac{k_x^2}{\omega^2}\omega_B^2-\frac{1}{4H^2}\tag{6.35a}$$

可以看出这与(6.6a′)式一样。

Lagrange 密度也可用作着手流体力学能量—动量张量的出发点[158]。这一张量表述给出能量守恒、动量守恒和角动量守恒的单一推广表达式，并可计算波与本底介质之间的能量交换和动量交换。

6.3 偏振关系

6.3.1 各微扰量之间的相位关系

本章一开头就假定各微扰量都按正弦式变化。现在进一步研究它们之间的相位关系，为此将各微扰量写成

$$\frac{v_x}{X}=\frac{v_z}{Z}=\frac{1}{P}\left(\frac{p}{p_0}\right)=\frac{1}{R}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)=A_0\exp[\mathrm{i}(k_x x+k_y y+k_z z-\omega^* t)] \tag{6.36}$$

其中 X、Z、P、R 等称为偏振系数，可设想为确定各微扰量之间相位关系的复振幅。欲求出非等温情况下的这些系数，必须采用大体上如第 2.1 节中那样的代数运算。例如，(6.15)式给出了 p/p_0 与 v_x 之间的相位差，用偏振系数可表示为

$$\frac{P}{X}=\frac{\omega^*}{Hgk_x} \tag{6.15a}$$

用这样的方法来计算其余的比值却是相当繁复的。但是，如可将有关方程线性化并以矩阵形式表出，则不失为一种求得偏振关系适当的简单方式。方程(6.5)即表明对于等温大气可以这样做。现在将这一步骤向前推进一步而考虑所谓“伪热型(pseudo-thermal)”大气[159]。这种大气的特征是：除了在有关方程之一(如方程组(6.12′)中的第三个方程)中明显地出现温度梯度 T' 时以外，可认为大气是等温的(H、T 均不变)。这样得到的结果在某种程度上有助于理解温度梯度是如何影响等温偏振关系的，但不应被看成是严格解。

于是，类似于(6.5)式，可以得到①

$$\begin{bmatrix} -\mathrm{i}\omega^* & 0 & 0 & \mathrm{i}k_x gH \\ 0 & -\mathrm{i}\omega^* & g & g+\mathrm{i}k_z gH \\ \mathrm{i}k_x & -\frac{1}{H}-\frac{T'}{T}+\mathrm{i}k_z & \mathrm{i}\omega^* & 0 \\ \mathrm{i}\gamma k_x & -\frac{1}{H}+\mathrm{i}\gamma k_z & 0 & -\mathrm{i}\omega^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Z \\ R \\ P \end{bmatrix}=0 \tag{6.37}$$

由于(6.37)式所代表的方程组为线性的和齐次的，故存在无限多个线性相关解。这意味着任意振幅的波都满足该方程组，只要微扰近似(一阶扰动量均很小)保持

① 应注意到：在无风等温情况下($\omega^*\to\omega$, $T'=0$)，(6.37)式 4×4 矩阵中最后一行的各矩阵元并不与(6.5)式中的一样，这是由于在得到(6.37)式时采用了连续性方程的不同形式。这说明：将一行(或一列)乘以一常数(现在是 γ)并将由此形成的各元与任一其他行(或列)相加时，行列式的值不变。

正确。大气波的振幅决定于其源项，而有了源项之后相应方程组就是非齐次的了，所以本章所导出的方程只在远离大气波源的区域内是有效的。

要求出偏振关系(即给出四个未知变量 X、Z、R 和 P 之间的比值)，必须将变量之一视为已知的然后再利用其余三个方程。共有四种不同途径来这么做，四种方法最终给出的结果是一样的。最简单的组合是将 Z 看作已知而对 X/Z、R/Z 和 P/Z 来求解

$$\begin{bmatrix} -\mathrm{i}\omega^* & 0 & \mathrm{i}k_x gH \\ \mathrm{i}k_x & -\mathrm{i}\omega^* & 0 \\ \mathrm{i}\gamma k_x & 0 & -\mathrm{i}\omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ R \\ P \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{H} + \dfrac{T'}{T} - \mathrm{i}k_z \\ \dfrac{1}{H} - \mathrm{i}\gamma k_x \end{bmatrix} \tag{6.38}$$

根据 Cramer 法则，这三个解的分母总是系数矩阵的行列式，所以它正比于 Z

$$Z \propto \omega^{*3} - c^2 k_x^2 \omega^* \tag{6.39}$$

于是有

$$X \propto \omega^* c^2 k_x k_z - \mathrm{i}\omega^* g k_x \tag{6.40}$$

$$R \propto \omega^{*2} k_z - \mathrm{i}\omega^{*2}\left(\frac{\gamma g}{c^2} + \frac{T'}{T}\right) + \mathrm{i}k_x^2\left[g(\gamma - 1) + \frac{c^2 T'}{T}\right] \tag{6.41}$$

$$p \propto -\mathrm{i}\omega^{*2}\gamma g/c^2 + \omega^{*2}\gamma k_z \tag{6.42}$$

现在来考察一下“伪热性”大气是对实际非等温大气的一种怎样好的近似。在简单运算之后即可看出由(6.40)式和(6.42)式重新得到非等温情况下 P/X 的严格形式(6.36)，因此 P 和 X 都是精确的。由(6.16)式得到关于 X/Z 的严格形式

$$\frac{X}{Z} = \frac{k_x g + \mathrm{i}c^2 k_x k_z}{\mathrm{i}(\omega^{*2} - c^2 k_x^2)} \tag{6.43}$$

这表明 Z 也是精确的。然而，R 的式子(6.41)却缺少含有温度梯度的某些项。尽管如此，(6.41)式仍提供了可简单导出并且实用的近似。

在成功地运用伪热型模型处理了偏振关系之后，是否可以试图用它来导出频散关系？然而答案是否定的。在这种情况下会得到一二阶微分方程(比较(6.19a)式)：

$$V'' - \frac{1}{H}V' + \left[k_x^2\frac{\omega_B^2}{\omega^{*2}} + \frac{\omega^{*2}}{c^2} - k_x^2 - \frac{g}{c^2}\frac{T'}{T}\right]V = 0 \tag{6.44}$$

在其中 ω_B 总是大于 ω_{an} 而差值 $\omega_B^2 - \omega_{an}^2$ 保持为常数。无论是以 ω_B 取代 ω_g 的等温处理还是伪热型处理都掩盖了实际大气中频散关系的许多复杂性。

6.3.2 粒子运动轨迹

关系式(6.43)给出了空气团的实际运动。对于高频率的声波 $\omega/k_x \to c$ 因而 $Z \to 0$((6.39)式)，所以这样的波是纵波。对于重力波，其气团运动轨道可在 Z 的

表式中突出含 c^2 的项而求得。这在可压缩性效应很小时(重力波正是这种情形)是一很好近似。

因此,略去指数性的空间变化后,

$$v_z \propto -A_0 c^2 k_x^2 \omega^* \exp(-\mathrm{i}\omega^* t)$$

而由(6.40)式得

$$v_x \propto A_0(\omega^* c^2 k_x k_z - \mathrm{i}\omega^* g k_x)\exp(-\mathrm{i}\omega^* t)$$

以 v_z 为计量相位的参考,则可将其写为 $v_z \propto \cos\omega^* t$,从而

$$v_x \propto \frac{1}{k_x}\left(\mathrm{Im}k_z - \frac{g}{c^2}\right)\sin\omega^* t - \frac{k_z}{k_x}\cos\omega^* t$$

消去时间后得

$$\left(v_x + \frac{k_z}{k_x}v_z\right)^2 = \frac{1}{k_x^2}\left(\mathrm{Im}k_z - \frac{g}{c^2}\right)^2(1 - v_z^2) \tag{6.45}$$

在等温大气中,由(6.7b)式和(6.8)式,有 $\omega_a/c = \mathrm{Im}k_z$。所以,利用形式如(6.6a)的频散关系(在其中以 ω^* 取代 ω 并以 ω_B 取代 ω_g)并再次注意到 $\omega^{*2} \ll c^2 k_x^2$,则粒子速度方程(6.45)可写为

$$v_x^2 + v_z^2\left(\frac{\omega_B^2}{\omega^{*2}} - 1\right) + \frac{2k_z}{k_x}v_x v_z = \frac{1}{k_x^2}\left(\frac{\omega_a}{c} - \frac{g}{c^2}\right)^2 \tag{6.46}$$

由于粒子位移由粒子速度的时间积分给出,故粒子轨道的方程形式与(6.46)式一样。

当 $\omega^* < \omega_B$ 时(6.46)式为一椭圆的方程。在长波极限下,即当 $k_x \to 0$ 时(由(6.40)式可见这时 $X \to 0$)粒子运动成为纯粹的垂直运动;而在短波极限下,当 $\omega^* \to \omega_B$ 而 $k_x \to \infty$ 时,运动也变成垂直运动。

对于纯粹的水平传播($k_z = 0$),当 $\omega^* = \omega_B/\sqrt{2}$ 时(6.46)式为一圆的方程,故这时粒子轨道为一圆。这一频率下的重力波为圆偏振的。对于 $\omega_B > \omega^* > \omega_B/\sqrt{2}$,运动为椭圆的,其铅直轴长于水平轴;而对于低频 $\omega^* < \omega_B/\sqrt{2}$ 则水平轴长于铅直轴。

重力波的典型气团轨道形象地在图 40 上画出[31],此图实际上是传播曲面图(图 37(c))的一个补充,为简明起见,只画出了其第一象限。在文献[160]中对渐消波和其他内波给出了类似于图 40 的气团运动轨道图。

在计入地球自转时,由于必须引进 Coriolis 力不同的 x 和 y 依赖关系,问题就成为三维的了。Eckart 在不考虑地球曲率的前提下证明[161]:当 $\omega_B > 2\Omega_E$ 时不可能有频率 $\omega^* < 2\Omega_E$ 的内波传播;但是,正如在下一节中将看到的,由于地球的曲率,Coriolis 力随纬度的变化会激起长周期(>24 小时)的 Rossby 波。对于 $\omega^* < 2\Omega_E$ 的情形,在不计地球曲率时可存在 $2\Omega_E > \omega^* > \omega_B$ 的内波,但 $\omega^* < \omega_{an}$ 的水平波长很长的波不能存在。这时椭圆形的气团轨道不再在铅直平面内。Tolstoy 将

这种波称为"回转波(gyroscopic wave)",并发现它只有一个可容许的传播方向[157]。

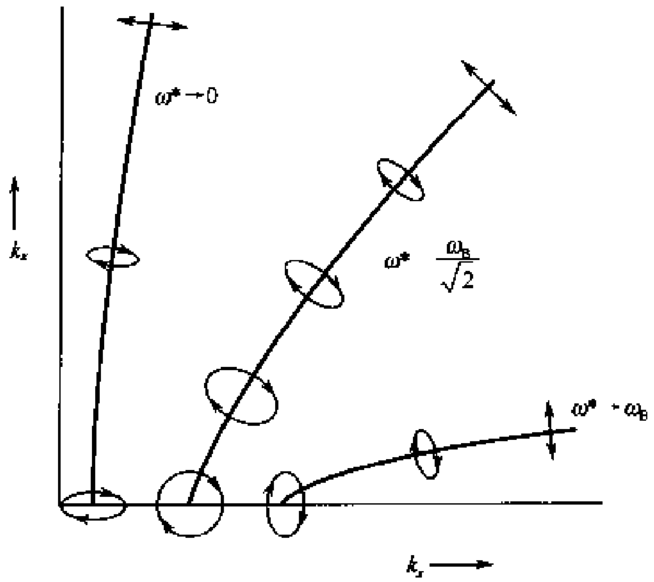


图 40　重力波中气团的运动轨道

6.3.3　复偏振项

容易看出:大部分偏振项均为复数。这就可以求出任何两个波参量之间的相位关系。由于任一复数 $A+iB$ 都可写成指数形式 $(A^2+B^2)^{1/2}\exp[i\arctan(B/A)]$,于是,例如,由(6.43)式所确定的 X/Z,如 k_x 为纯实数而 $k_z=\mathrm{Re}k_z+i/2H$,则 X 与 Z 之间的相位差(对应于 v_x 与 v_z 之间的相位差)即由 $\arctan[(\gamma-2)/2\gamma(\mathrm{Re}k_z)H]$ 给出。对于消散波,当 $\mathrm{Re}k_z=0$ 时,两个方向的运动相位差 90°,因而粒子运动是圆偏振的。

6.4　Rossby 波

6.4.1　地转风

如本章开头所提到过的,在计入地球自转的影响时,Euler 方程(1.30a)的右端还须添加对应于 Coriolis 力的一项:

$$D_t\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{g}+2\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{E}}\times\boldsymbol{v} \tag{6.47}$$

在这里实际上已作了三个假定:首先是已略去了地转产生的离心加速度((1.43)式中第三项),这在大尺度空气运动且无强烈的卷曲运动(如飓风)时是合理的;其次

是 Coriolis 矢 $\boldsymbol{\Omega}_E$ 的水平分量可以忽略①(亦即 $2\boldsymbol{\Omega}_E\times\boldsymbol{v}$ 的铅直分量可忽略)，这一忽略被称为"传统近似(traditional approximation)"；第三是铅直方向的流体静力平衡，即(1.13)式仍然成立。在这些假定下运动方程给出 $d_t v_z=0$，于是风速的铅直分量就是一常数而可由边界条件确定。由于在地面上不可能有大尺度的铅直风，因而在整个大气中 $v_z=0$。但是存在着对静力平衡的小尺度偏离，从而形成铅直运动以试图恢复平衡。

现在可用运动方程(6.47)来求出压力梯度力被 Coriolis 力平衡时所存在的风(即所谓地转风)$\boldsymbol{v}_g$。在中等纬度其分量为

$$v_{ge}=-\frac{1}{f}\frac{1}{\rho}\partial_n p,\quad v_{gn}=\frac{1}{f}\frac{1}{\rho}\partial_e p,\quad v_{gz}=0 \tag{6.48}$$

这里引进的直角坐标系为：e 指向东，n 指向北，z 垂直向上；定义为

$$f=2\Omega_E\sin\theta \tag{6.49}$$

的 Coriolis 参量描述了 Coriolis 矢 $\boldsymbol{\Omega}_E$ 对纬度 θ 的函数关系。在北半球 $f>0$ 而在南半球 $f<0$；在赤道上 $f=0$ 从而不存在地转风，以致气流必须直接横过等压线。

地转风方程(6.48)描述了起始时从高压区直接流向低压区的空气团的运动。然而这种运动是相当缓慢的，因为 Coriolis 力使气团偏向平行于等压线的运动。正如对静力平衡状态的短暂偏离可以导致围绕其平衡状态的、周期为几分钟的振荡，对地转平衡的偏离就导致周期为几小时或更长的振荡——这种振荡就是行星波。

6.4.2 Rossby 波的形成

地转运动可使大气中呈现波动。在上一小节中已看到，对于地转风 $D_t\boldsymbol{v}_g=0$，故在以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 随流体一起运动的参考系中风分量保持常值，起始时取 $\boldsymbol{v}_g=(v_{ge},0,0)$，现如存在某一水平压力分布，那么与从低压区伸向高压区的压力梯度一起，会形成一经向风 v_{gn}。由于运动是指向东的，v_{ge} 和 v_{gn} 二者均保持常值。

但地球表面为一封闭曲面，低压区和高压区必定是相间存在的。在接通从东到西的回路后，会出现 v_{gn} 在其中为反向的区域。对于地面上的观察者来说，这就表现为压力和经向风速一周期系列的推移。可是大气并非如此简单，实际上也并非像这样就形成地转波。如高压区与低压区之间的距离很小，那么转动效应就变得重要，离心加速度不再能忽略而必须计入梯度风。加之，经向风切变可以导致不稳定的气旋波。反之，如高、低压区之间的距离很大，那么的转经向风就非常小而 Coriolis 参量 f 的经向变化就非常重要。由此形成的波就是 Rossby 波。

地转风 $\boldsymbol{v}_g$ 是"无散的"，亦即 $\nabla\boldsymbol{v}_g=0$。这对任何不可压缩均匀大气中的风都

① 如果不这么做。那么解出的运动方程就会表明：有一起始时为水平的气流在六小时以后会变为完全铅直的，但实际情况并非如此，因为气流会循着弯曲的地球表面而沿球面流动。

是正确的。类似地，能够产生 Rossby 波最简单的大气模型就是无黏性、等温、无散的不可压缩大气，这正是 Rossby 当初研究这种长波的出发点[162]，而它代表原型大气。如果波动是无散的，则其粒子速度 $\boldsymbol{v}_1$ 有①

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0$$

故如一平面波存在，其波矢 $\boldsymbol{k}$ 应满足

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0,$$

所以波为横波，而对于 k 为纯实数的任意稳定运动，都应为线性偏振的。

如欲在一平面内考察 Rossby 波，就必须计及 Coriolis 参量 f 随纬度的变化。为此可将 f 看成一线性函数：$f = f_0 + \beta n, \beta \equiv \partial_n f$。这样的平面称为 β 平面，在其上取如下直坐标系数：x 轴指向波的相位传播方向而 y 轴指向北。x 和 y 方向不必对应于纬向和经向，因为无论是 Rossby 波还是其在球面上的推广形式行星波，相位传播方向既可以垂直于自转轴也可以与之成一斜角。在如此的纵、横方向选定 x、y 轴后，波中粒子速度分量即为

$$\begin{aligned} v_{1x} &= 0 \\ v_{1y} &= Y \exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)] \end{aligned} \tag{6.50}$$

在很多场合下，将水平风场以其转动性质表示出是有利的。由于对于任一流体，如果

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

那么

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \boldsymbol{v} \equiv \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta} \tag{6.51}$$

风速度的旋度是风旋转（称作涡度 $\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \boldsymbol{v}$）的一种量度。正如我们关心的只是 f 的铅直分量，所以主要兴趣也只是涡度的铅直分量 ζ_z。由于 f 是相对于自转着的地球为静止的流体所具有的涡度，因此一流体元的绝对铅直涡度就是 $\zeta_a = \zeta_z + f$。对于现在所处理的波动，$\zeta_z = (\nabla \times \boldsymbol{v}_1)_z = \partial_x v_{1y}$。

现在要求出描述涡度变化的方程。从运动方程(6.47)出发，略去重力并按 e-n 坐标系写出其分量方程：

$$D_t v_e = -\partial_e p + f v_n, \quad D_t v_n = -\partial_n p - f v_e$$

取运动方程的旋度后给出

$$D_t(\partial_e v_n - \partial_n v_e) = -f(\partial_e v_e + \partial_n v_n) - v_n \partial_n f - v_e \partial_e f$$

因 $\partial_t f = 0$，故可在上式左端加 $\partial_t f$ 而成

$$D_t(\zeta_z + f) = -f \nabla \cdot \boldsymbol{v}$$

对于不可压缩大气 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$，故

① 在此恢复表示扰动速度的下标1，以区别开无下标的流体速度 v（或 v_g）。

$$D_t(\zeta_z + f) = D_t\zeta_a = 0 \tag{6.52}$$

表明绝对涡度是守恒的。将上式展开：

$$\partial_t\zeta_z + v_{0x}\partial_x\zeta_z + v_{0y}\partial_y\zeta_z + v_{1y}\partial_y f = \partial_t(\partial_x v_{1y}) + v_{0x}\partial_x^2 v_{1y} + \beta_y v_{1y} = 0 \tag{6.53}$$

在其中令 $\beta_y \equiv \partial_y f$ 。以(6.50)式代入(6.35)式即可看出，平面波的频率为

$$\omega = v_{0x}k - \frac{\beta_y}{k} = \left(v_{0e}k - \frac{\beta}{k}\right)\cos\alpha \tag{6.54}$$

其中 α 为 e 与 x 之间的夹角。一般约定 $\beta_y > 0$ 而 $|\alpha| < \pi/2$。

6.4.3 Rossby 波的性质

频散关系(6.54)由两部分组成：第一项代表纬向风的对流而第二项意味着 Rossby 波的相位传播总是有一西向分量。事实上，相速度的这一纬向分量与角度 α 无关而总是等于

$$V_{Pe} = v_{0e} - \frac{\beta}{k^2}$$

而纵向相速度 $V_{Px} = V_{Pe}\cos\alpha$ 可恰当地看作是西向漂移的结果。

在文献[163]中给出西向漂移的一种有趣解释：如将可变的 Coriolis 参量看成是从东向西的一种力线的场，则可以说：切割这些力线，波中的横向速度就产生一由感应涡度和相应的感应速度交替组成的阵列，结果形成的相速度总是有一西向分量——这一各向异性起源于地球的涡度(Coriolis 参量)的梯度指向北方这一事实。当横向速度以最快速率切割力线时得到最大的感应效应，这种情况发生于波峰是南北取向时；反之，当波峰为东西取向时，感应消失而波不再能移动。

由(6.54)式求出群速度的纵向分量：

$$V_{Gx} = \partial_k\omega = \left(v_{0e} + \frac{\beta}{k^2}\right)\cos\alpha \tag{6.55a}$$

而其横向分量为

$$V_{Gy} = \left(\frac{1}{k}\right)\partial_\alpha\omega = \left(\frac{\beta}{k^2} - v_{0e}\right)\sin\alpha \tag{6.55b}$$

从而群速度也由两部分组成：纬向风 v_{0e} 的对流和大小为 β/k^2 而角度为 2α 的波群速度(图 41)。

Rossby 波发生于无散大气中，这势必限制了它们只能发生于 Ekman 边界层(由 1km 以内的最低层大气组成)以上的高度上。

Rossby 波可分为两种类型：自由 Rossby 波和受迫 Rossby 波。前者系由对地转平衡的无规偏离所形成，例如可由斜压不稳定性、正压不稳定性或热扰动引起；后者系由山和山脉诱导出对地转平衡的偏离所产生。前者既可由东向气流也可由

西向气流形成；而后者只能由东向气流形成[1]。如果风 v_{0x} 是向西吹的，那么它势必会减弱波的形成。这一点很容易想像到，只须留意：在北半球，Coriolis 力力图使风朝它运动方向的右方偏离，而在南半球则朝左边偏离。因此，如考虑赤道上东向气流的扰动，就总是有一指向赤道的 Coriolis 恢复力，因而就有波可以产生。反之，西向气流总是有一背离赤道的恢复力，因而波不可能形成。相同类型的机理也适用于中等纬度。

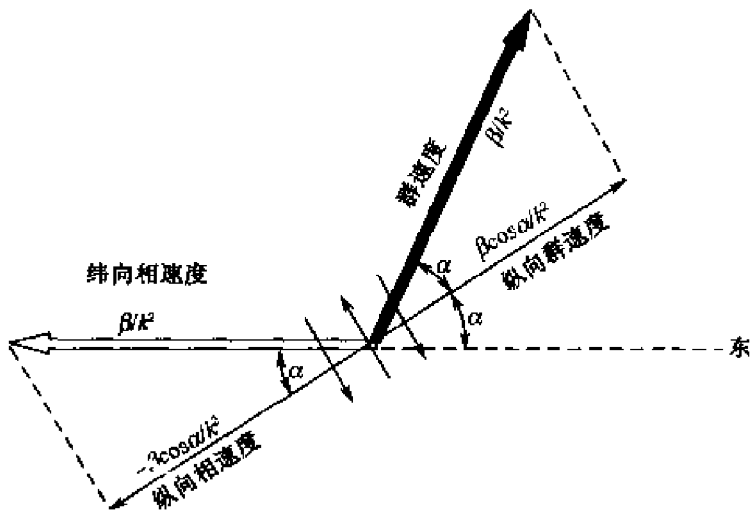


图 41　Rossby 波中的速度关系

对流层上层中的热风是向东吹的，而以 Ekman 边界层以上 Rossby 波的确占有重要地位。另一方面，温度梯度有可能产生足够强的东向气流使 Rossby 波动可以忽略。这种情况出现于快速运动的东向气流的对流层急流中。在这方面，或许应重新强调 Rossby 波乃系 Coriolis 参量随纬度变化的必然后果这一事实。如果没有 Coriolis 力的纬度变化，Rossby 波就应退化为地转风：在其中 Coriolis 力与压力梯度平衡。

6.5　外　　波

6.5.1　特性表面波

按照能量储存的方式，外波可分为两种类型。任何波的存在都依赖于两个或更多个能量储存类型，使能量在其间可进行重复交换。表面波一词就是指能量储存方式仅存在于介质表面或不连续面上的波：在两种不同介质的分界面上存在着密度的不连续性，这时形成的表面波称为 Helmholtz 波[2]；如不连续性是属于密度

[1] 参阅第 10 章中对山背波的讨论。

[2] 例如，由液体表面的表面张力为恢复力所形成的波就是此种类型，称为表面张力波或毛细管波。

以外的其他参量(如温度、风速等),则所形成的表面波称为边界波。

消散波是存在于流体内部而不仅仅是表面上,其最著名的例子就是上文(见第1.2节)提到的 Lamb 波,它是在等温大气中所有频率下都满足声波关系 $\omega=ck_x$ 的非频散波,Lamb 波是以刚性地面为下边界条件的直接推论。像所有消散波一样,Lamb 波的绝大部分能量都集中在构成边界的不均匀性边缘附近,由此之故,有人杜撰出"边缘波(edge wave)"一词来描述含风的非等温大气中与 Lamb 波相当的波[164]。

由两个固定边界上的反射所形成的驻波称为"环形波"或"细胞波(cellular wave)",如将边界取在 $z=0$ 和 $z=h$ 这两个高度上,则因波函数在这两个高度上必须处处为 0,所形成的环形波的波函数就是

$$A_0\sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right)\exp[k_x x-\omega t+\mathrm{i}\ \mathrm{Im}k_z z]$$

也可以存在相位无铅直变化的内波,在等温大气中内波的特征是 $\mathrm{Im}k_z=1/2H$,从而 $\mathrm{Re}k_z=0$。这一类内波定出了频散图上内波区域的边界。

计人边界条件(或源项)即意味着在频散图上不再存在一代表渐消波的区域;而 $k_z=0$ 的判据由频散图上的直线表示出,经常出现的一条线的方程在等温大气情形下为

$$\omega^{*2}=gk_x\sqrt{\gamma-1} \tag{6.56}$$

更普遍地,在非等温大气中为

$$\omega^{*2}=c\omega_B k_x \tag{6.56'}$$

这一方程类似于深水表面的重力波方程 $\omega^2=gk_x$,故它所代表的波称为特性表面波。

特性表面波总是将声波区域从重力波区域中分离出来,其理由是:(6.56′)式代表阻抗为无限大的大气波方程,因此不可能将大气某区域内的重力波与性质不同的大气另一区域内的声波相耦合。类似地,消散波区域可分为不相互作用的声波部分和重力波部分,所以渐消波可以与同一类型的内波相互作用。

特性表面波是椭圆偏振的。利用第6.3节中的结果可以看出,对于所有渐消波,Z 为纯实数而 X 为纯虚数,所以渐消波为椭圆偏振的——但有一例外,这一例外就是 Lamb 波,Lamb 波没有铅直相位变化,因此在一切高度上 $Z=0$,因此

$$\omega/k_x=c \tag{6.57}$$

从而 Lamb 波可判明为在介质中传播着的体声波,因 $Z=0$,它们就是线性偏振的,代入频散关系(6.6),即求出:对于 Lamb 波,

$$\mathrm{Im}k_z=\frac{g}{2c^2}[\gamma\pm(\gamma-2)] \tag{6.58}$$

存在着两种类型的 Lamb 波,二者的偏振关系都由 $P=\gamma,R=1,X=c$ 和 $Z=0$ 给

出，满足关系 $\mathrm{Im}k_z=g/c^2$ 的第二型 Lamb 波是存在于能源下方的波，如能流是完全向上的，它们就不会存在，余下的 Lamb 波的一个重要特性是，在一无限高空气柱中波的总能量密度 ε 是有限的，而在等温大气中(略去势能)

$$\varepsilon \propto \frac{1}{2}\rho_0 v_{1z}^2 \propto \int_0^{\infty} \exp[(\gamma-2)g/c^2]\mathrm{d}z \propto c^2/(\gamma-2)g \tag{6.59}$$

曲线(6.56)与(6.57)在 ω-k_x 平面上相交于 ω 等于 V-B 频率 ω_g 而

$$k_x = \sqrt{\gamma-1}\,g/c^2 \tag{6.60}$$

时(图 42)，所以在特性表面波与 Lamb 波之间有可能存在能量相互作用。然而，线性偏振的 Lamb 波与椭圆偏振的特性表面波之间的直接相互作用立即就可排除。

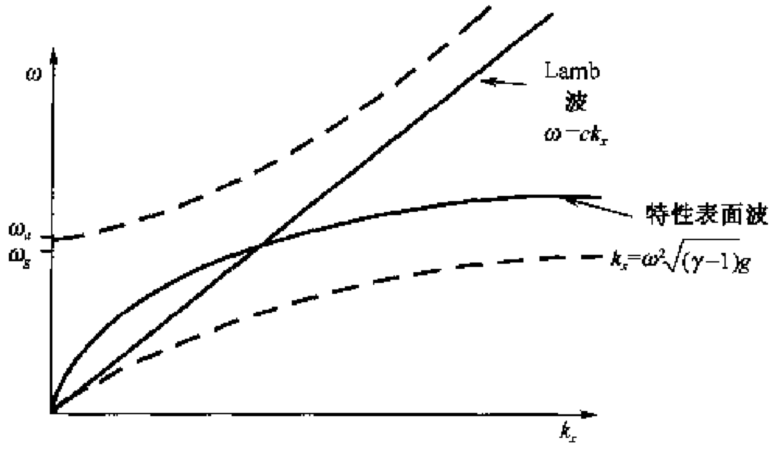


图 42　Lamb 波和表面波的频散图

6.5.2　与内波的比较

文献[165]中所展示的一种传播图方案对于比较内波和外波的特性特别有用，定义折射率为

$$n_x = ck_x/\omega^*, \quad n_z = ck_z/\omega^* \tag{6.61}$$

并在(n_x^2, n_z^2)平面上标绘出 ω^* 为常数的曲线。在等温大气中这些曲线都成为直线(图 43)。n_z^2 轴以下区域对应于 n_z 的虚部，它们代表渐消波；连接(1,0)和(0,1)的线代表 $\omega^*=\infty$ 而对应于高频极限下的声波。正如在图 37(a)中阴影部分不可能存在波一样，图 43 中阴影部分也不可能存在波——不论是内波、外波或体波。对折射率的这种标绘在处理等温大气时特别有用，但却会掩盖非等温大气的某些特性[166]，在那种情形下更好的方法是标绘 k_x 与 k_z 之间的关系。

对于等温大气容易看出，当 $\omega^*\to 0$，所有的波都具有相同的水平相速度 $V_{Px}=2c\sqrt{\gamma-1}/\gamma\approx 0.9c$(如 $\gamma=1.4$)。当 ω^* 增大时，内波的水平相速度减小，而消散波的水平相速度以一种更复杂的方式变动。如图 44 所示，等温大气波的相速度

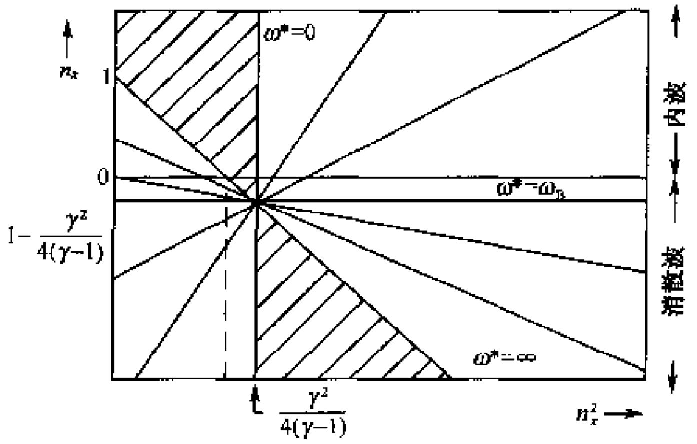


图 43 折射率平方域内的恒定周期曲线

和群速度可写为

$$V_{Px} = c/n_x \tag{6.62}$$

$$V_{Gx} = V_{Px}(\omega^{*2} - \omega_B^2)\Big/\left(\frac{\omega^{*2}}{n_x^2} - \omega_B^2\right), \tag{6.63}$$

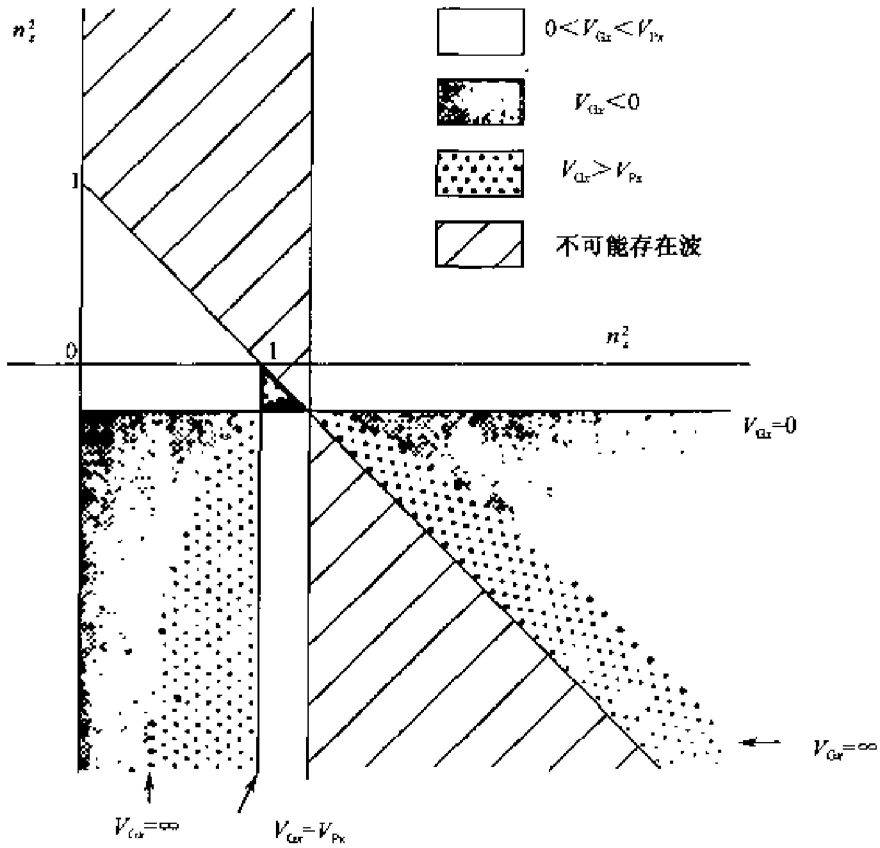


图 44 折射率平方域内水平相速度与群速度的关系

可以看出：对于某些波（结果证明全部是消散波），$V_{Gx}>V_{Px}$ 而 V_{Gx} 可能变成无限大，这发生于当

$$\omega^{*2} = ck_x\omega_B \tag{6.64}$$

时，这正是特性表面波。

可以进行如下类比：当一障碍物在静水中运动时，在障碍物前方会形成波，这种"弓形波"相对于障碍物保持固定，所以弓形波的相速度等于障碍物的运动速度；但弓形波的群速度必须超过障碍物速度以使能量传递到障碍物前方的点上。这应表明：具有高群速度的渐消波与高阻抗的大气"障碍物"（诸如陨石、飞机等等）的运动有关，当群速度变为无限大时就会有存在不稳定性的可能[167]。

在对流层中，曾证明消散波可由水平风速在铅直方向逐渐变化的风切变产生[168]。在电离层高度，渐消波的存在还不能被肯定地证实，曾有人认为夜光云可能是中层顶处温度不连续性上的表面波[169]，而它们在 E 层和 F 层的存在曾得到某种证实[170,171]。

另一方面，Lamb 波和边缘波只能作为强迫振荡存在于平流层以上[172]。边缘波 99%以上的能量处于 110km 以下的高度上[164]。然而，各种不同压力脉冲的微气压观测大部分看来是由边缘波引起的[164,173]，这种脉冲包括历史上著名的 1883 年 Krakatoa 火山爆发、1908 年西伯利亚大陨石坠落、1964 年阿拉斯加大地震等天然大"爆炸"，以及前些年的大气核试验和 1986 年美国航天飞机"挑战者号"的悲剧性爆炸[174]等人工爆炸，参阅第 10 章第 10.2 节和 10.3 节。

6.5.3　边界波

现在来考察大气中两个等温层（各具不同的密度和温度）之间边界上的波。令原点位于边界面上而以下标 l 标示下层（$z<0$）、u 标示上层（$z>0$）。

在界面上，要求压力和速度铅直分量连续，但由于界面是可任意运动的，所以在 $z=0$ 的两侧不能简单地要求压力和速度相等，即使这运动是任意地小，都会在铅直方向有一压力的零阶梯度（$\mathrm{d}_z p_0$），为此必须应用边界条件：

$$z=0:\begin{cases} D_t p\,|_l = D_t p\,|_u & (6.65)\\ D_t v_z\,|_l = D_t v_z\,|_u & (6.66)\end{cases}$$

其中

$$D_t p = \partial_t p_1 + v_{1z}\partial_z p_0$$

而

$$D_t v_z = \partial_t v_{1z}$$

将(6.36)式应用于(6.65)式，表明

$$\frac{\rho_l c_l^2(\mathrm{i}\omega^2 k_{zl} + k_x^2 g)}{\rho_u c_u^2(\mathrm{i}\omega^2 k_{zu} + k_x^2 g)} = \frac{A_u}{A_l} \tag{6.67}$$

而将(6.36)式应用于(6.66)式则给出

$$\frac{\omega^2 - c_l^2 k_x^2}{\omega^2 - c_u^2 k_x^2} = \frac{A_u}{A_l} \tag{6.68}$$

其中上、下层中的水平波数 k_{zu} 和 k_{zl} 均取代为 k_x，因而波前在界面上相匹配。

可在每一层中应用频散方程(6.6)以求出 k_{zl} 和 k_{zu}，如假定表面波为外波面 $k_z = \mathrm{i}\Gamma$，则在每层中

$$\Gamma = \frac{1}{2H} \pm \left[\left(\frac{1}{2H}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + k_x^2\left(1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2}\right)\right]^{1/2} \tag{6.69}$$

由(6.67)式、(6.68)式两式相等得出

$$\frac{\rho_l c_l^2 (k_x^2 g - \omega^2 \Gamma_l)}{\rho_u c_u^2 (k_x^2 g - \omega^2 \Gamma_u)} = \frac{\omega^2 - c_l^2 k_x^2}{\omega^2 \quad c_u^2 k_x^2} \tag{6.70}$$

上式是没有背景风的情形，如计及水平背景风，则仅需分别以 ω_l^* 和 ω_u^* 取代 ω 即可。

如在界面上 $c_l = c_u = c$，则(6.70)式化为

$$\rho_l (k_x^2 g \quad \omega^2 \Gamma_l) = \rho_u (k_x^2 g - \omega^2 \Gamma_u)$$

因此，对于一不可压缩均匀半空间上空的表面重力波，其特性方程可用如下步骤得到：取 $c = \infty$，$H_l = \infty$ 以致 $\Gamma_l = k_x$ 而设 $k_x \gg 1/2H_u$，于是 $\Gamma_u = -k_x$（如此选择符号是为了使能量随离开边界而减弱），而波的相速度由下式给出

$$V_{Px}^2 = \left(\frac{\omega}{k_x}\right)^2 = \frac{g(\rho_l - \rho_u)}{k_x(\rho_l + \rho_u)} \tag{6.71}$$

上式即是关于两种不可压缩流体（如油和水）分界面上表面波的著名方程。当 $\rho_l \gg \rho_u$，如在空气与水的分界面上时，该方程进一步简化为

$$V_{Px}^2 = g/k_x \tag{6.71a}$$

它给出深水中表面重力波的频散方程

$$\omega^2 = g k_x \tag{6.71a'}$$

这一方程实质上不受下半空间的可压缩性或密度分层性的影响，但与两层之间密度的突变不连续性有关。不过，在可压缩的下层中有一对应于 Lamb 波的第二解[157]。在此情形下不必援引下边界条件，因 Lamb 波是界面所引导的声波，在表面波模式与声(Lamb)波模式之间没有相互作用，因为表面波是圆偏振而无旋的，反之 Lamb 波是线性偏振而非无旋的。

然而，除了在最下面的边界层以外，密度不连续性不大可能在大气中存在，因此很有理由假定：服从(6.71a)式的表面重力波可以延伸入海洋上空的大气中，只是它们的振幅非常之小而不具备任何气象学重要性。

对于更为实际化的大气，边界条件取为：$z=0$ 时，$\rho_l = \rho_u$，可证明在等温大气中 $\Gamma = 1/2H$，对应于所有高度上能流为常数。为使边界波所携带的能量为有限的，Γ

在边界以上必须小于 $1/2H$，而在边界以下必须大于 $1/2H$。亦即，能流应集中于边界上，在 Γ 的表式中，负号用于上区域而正号用于下区域。

在低频极限下，设 $(1/2H)>k_x$，则

$$\Gamma_l=\frac{1}{H_l}-\frac{(\gamma-1)gk_x^2}{\gamma\omega^2}$$

而

$$\Gamma_u=\frac{(\gamma-1)gk_x^2}{\gamma\omega^2}$$

故

$$c_l^2\left((2\gamma-1)gk_x^2-\frac{\omega^2\gamma}{H_l}\right)(\omega^2-c_u^2k_x^2)=c_u^2gk_x^2(\omega^2-c_l^2k_x^2) \tag{6.72}$$

或以 V_{Px} 表出，

$$c_l^2\left[(2\gamma-1)g-\frac{\gamma V_{Px}^2}{H_l}\right][V_{Px}^2-c_u^2]=c_u^2g\,[V_{Px}^2-c_l^2] \tag{6.72'}$$

它给出 V_{Px}^2 的一二次方程

$$V_{Px}^4\gamma^2g-V_{Px}^2\{c_l^2(2\gamma-1)g+c_u^2(\gamma^2-1)g\}+c_u^2c_l^2(2\gamma-2)g=0 \tag{6.73}$$

设 $c_u>c_l$，则 V_{Px}^2 的两个解近似地为

$$V_{Px}^2=\frac{2c_l^2}{\gamma+1}\left\{1-\frac{(2\gamma-1)c_l^2}{(\gamma^2-1)c_u^2}\right\} \tag{6.74a}$$

和

$$V_{Px}^2=\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}c_u^2\left\{1+\frac{c_l^2}{(\gamma+1)^2c_u^2}\right\} \tag{6.74b}$$

基本上存在着边界波的两种可能类型：一种以接近于下层中的声速移动，另一种以接近于上层中的声速移动。在大气普遍的 n 层模型中，描述相速度的方程为 $2(n-1)$ 阶的，可能的边界波数目就也是 $2(n-1)$。

6.6　大　气　潮

6.6.1　概述

地球大气在太阳和月球所施加的周期性外力(引力和"热力"，其中以太阳的热效应为最重要)作用下，产生类似于受迫振动的响应，这种以太阳日的约数为周期的响应即称为大气潮。半日周期在大气波动理论中占据着中心位置，因为它的作用如同一截止频率。对于一旋转着的大块均匀不可压缩流体中的波(惯性波)，在两极半日频率 $2\Omega_E$ 的作用如同一高频截止频率。这是因为涡度的小变化在

Coriolis参量保持常数时由(6.51)式可得

$$\partial_t(\nabla\times v)=2\Omega_E\partial_z v \tag{6.75}$$

再求一次旋度并考虑到对于不可压缩均匀流体$\nabla\cdot v=0$，即有

$$-\partial_t^2(\nabla^2 v)=4\Omega_E^2\partial_z^2 v \tag{6.76}$$

(6.76)式仅当

$$\omega^2(k_x^2+k_y^2+k_z^2)=4\Omega_E^2 k_z^2 \tag{6.77}$$

时才有平面波解，所以振荡周期必须长于地球自转半周期。而如我们在前一节中所看到的，行星波是 Coriolis 参量有经向变化时的惯性波，而它们的周期也必须长于半日周期。

另一方面重力波在半日频率处有一低频截止频率，对于以 $z=0$ 为底、$z=h$ 处有一自由表面的均匀流体，方程(6.77)仍确定出现于 $\omega<2\Omega_E$ 而 k_x、k_y、k_z 均为实数时的波。可是自由表面也使 k_z 为纯虚数的解成为可能，故如 $\omega>2\Omega_E$，

$$\Gamma^2(\omega^2-4\Omega_E^2)=\omega^2(k_x^2+k_y^2) \tag{6.78}$$

这些解有频散关系：

$$\omega^2=g\Gamma\tanh[\Gamma h] \tag{6.79}$$

(6.78)式和(6.79)式表明：对于 $\omega>2\Omega_E$，当惯性波不可能在内部传播时，表面波就成为可能。这时其频散关系为自转所修正。这种波在半日频率处有一低频截止频率，另一方面 l 值很大的 Rossby 波可认为是 $\omega<2\Omega_E$ 的表面波。

表面波所引起的深度变化产生铅直涡度的扰动值，它等于 f 乘以真实深度与未被扰动深度之比，这一扰动涡度的存在使得波矢另一分量(如 k_y)为纯虚数的解成为可能。在这种情形下边界条件可为按离开边界的距离 y 指数性减小的涡度所满足，于是涡度就沿着边界按深度的升降而作一维传播，这就是 Kelvin 波。

旋转着的流体中的内重力波须从方程(6.75)来着手分析，这时须加上表示位势温度梯度造成的水平涡度产生率的一项，(6.76)式的 z 分量即为

$$-\partial_t^2(\nabla^2 v_z)=4\Omega_E^2\partial_z^2 v_z+\omega_B^2(\partial_x^2+\partial_y^2)v_z \tag{6.80}$$

上式的平面波解满足

$$\omega^2(k_x^2+k_y^2+k_z^2)=4\Omega_E^2 k_z^2+\omega_B^2(k_x^2+k_y^2) \tag{6.81}$$

因三个波数分量均有实数成分，所以平面波解仅当 ω 位于 $2\Omega_E$ 和 ω_B 之间时才能存在，当 $\omega_B<2\Omega_E$ 时，$\omega_B<\omega<2\Omega_E$ 的回转波为唯一存在者，因此我们看到周期长于半日周期的内重力波不可能存在，这一点对所有纬度都适用。

这表明：除周日成分之外，所有大气潮都是重力波模式。在纬度±30°之间地区，周日大气潮也可能是重力波，但如它存在于较高纬度就必须是 Rossby 模式。在一级近似下，低纬度处的大气潮模式是渐消的，这是因为长周期渐消波的波长满足条件

$$\lambda>0.9(2\pi)c/\omega \tag{6.82}$$

(参看第5.2节)。不满足此条件的波长都属于内重力波。对于大气潮模式,波长由$2\pi R_E/m$给出而频率为$\omega=2\pi m/24$(小时)$^{-1}$,所以条件(6.82)被满足的前提是:影响声速的大气温度应小于约750K。这在高层大气并不正确,因此在高于约150km的高空应可期望找到大气潮模式中的铅直相位结构。因此由直觉可以期望:在从地面到与等值深度相等的高度不存在铅直的相位变化,类似地可期望在高层大气找到铅直相位变化。

6.6.2　理论

在球坐标下,自转地球上大气的运动方程(6.47)可写成

$$\left.\begin{aligned} D_t v_\phi &= a_\phi - \left(2\Omega_E + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\right)(v_\theta\cos\theta + v_r\sin\theta) \\ D_t v_\theta &= a_\theta + \left(2\Omega_E + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\right)v_\phi\cos\theta - \frac{v_r v_\theta}{r} \\ D_t v_r &= a_r - g + \left(2\Omega_E + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\right)v_\phi\sin\theta + \frac{v_\theta^2}{r} \end{aligned}\right\} \tag{6.83}$$

其中离心加速度已并入g中,a为外压力和摩擦力造成的加速度,而各速度分量定义如下:

$$v_r = D_t r,\quad v_\theta = rD_t\theta,\quad v_\phi = r\sin\theta D_t\phi$$

对于大气潮运动,整个大气层可看成很"浅",从而可取$r=R_E$(地球半径),而以∂_z取代∂_r。当$r=R_E$时坐标为0。这时可假定$v_{0_r}=0$[175],于是微扰的运动方程可写为①

$$\left.\begin{aligned} \partial_t v_{1\theta} - 2\Omega_E v_{1\phi}\cos\theta &= -\frac{1}{R_E}\partial_\theta\left(\frac{p_1}{\rho_0} + \Phi\right) \\ \partial_t v_{1\phi} + 2\Omega_E v_{1\theta}\cos\theta &= -\frac{1}{R_E\sin\theta}\partial_\phi\left(\frac{p_1}{\rho_0} + \Phi\right) \end{aligned}\right\} \tag{6.84}$$

而

$$\partial_z p_1 = -g\rho_1 - \rho_0\partial_z\Phi \tag{6.85}$$

因

$$D_t = \partial_t + v_r\partial_z + \frac{v_\theta}{R_E}\partial_\theta + \frac{v_\phi}{R_E\sin\theta}\partial_\phi$$

为简化问题起见已略去背景盛行风v_0;Φ为描述引力起潮力的一标量势[155],黏性和热传导等损耗效应皆被略去。

这时连续性方程取形式:

$$D_t\rho = \partial_t\rho_1 + v_{1z}\partial_z\rho_0 = -\rho_0\chi \tag{6.86}$$

---

① 在此又恢复使用下标0和1,含义同前。

而绝热方程为

$$\frac{R}{M(\gamma-1)}D_tT=\frac{R}{M(\gamma-1)}(\partial_tT_1+v_{1z}\partial_zT_0)=\frac{gH}{\rho_0}D_t\rho+J \qquad (6.87)$$

其中速度散度

$$\chi=\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{R_E\sin\theta}\partial_\theta(v_{1\theta}\sin\theta)+\frac{1}{R_E\sin\theta}\partial_\phi v_{1\phi}+\partial_zv_{1z} \qquad (6.88)$$

J 为单位时间、单位质量的“热致潮加温(thermotidal heating)”,表示作用于自由大气振荡的周期性驱动力。

现在最方便的是寻求上述诸方程对 $-(\gamma p_0)^{-1}D_tp$ 这个量的周期解。对于不存在驱动力 J 的自由振荡,这个量对应于速度散度 χ,但当计入 J 时它就不再等于 χ,而可将其记作

$$-\frac{1}{\gamma p_0}D_tp=G(\theta,z)\exp[\mathrm{i}(\omega t+m\phi)]$$

其中 $2\pi/\omega$ 既代表太阳日或太阴日,也可代表它们某一合适的份额,而 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

波场各变量均有相同的指数依赖关系,所以所有含∂_t和∂_ϕ 的项均可消去。这直接导出以压力扰动 $p_1(\theta,z)$表示出的速度函数 $v_{1\theta}(\theta,z)$和 $v_{1\phi}(\theta,z)$的表达式①。在$\partial_t\Phi$ 可忽略的前提下,可得出 $G(\theta,z)$的方程:

$$H\partial_z^2G+(H'-1)\partial_zG=\frac{g}{4R_E^2\Omega_E^2}\hat{F}\left(\left(H'+\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)G-\frac{(\gamma-1)J(\theta,z)}{\gamma^2gH}\right) \qquad (6.89)$$

其中 $\hat{F}$ 为一算符:

$$\hat{F}\equiv\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\frac{\sin\theta}{f^2-\cos^2\theta}\partial_\theta\right)-\frac{1}{f^2-\cos^2\theta}\left(\frac{m}{f}\,\frac{f^2+\cos^2\theta}{f^2-\cos^2\theta}+\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) \qquad (6.90)$$

而

$$f=\frac{\omega}{2\Omega_E},J=J(\theta,z)\exp[\mathrm{i}(-\omega t+m\phi)]$$

方程(6.89)可用分离变量法求解。如令

$$G(\theta,z)=\sum_nL_n(z)\Theta_n(\theta) \qquad (6.91)$$

则 J 可用通常被称为 Hough 函数的 Θ_n 来展开:

$$J(\theta,z)=\sum_nJ_n(z)\Theta_n(\theta) \qquad (6.92)$$

这样(6.89)式就分裂为两个方程:Laplace 潮汐方程和铅直结构方程。

① 推导细节参见文献[176]。

(1)Laplace 潮汐方程

分离变量法使原来的偏微分方程分裂为两个或更多个部分，每部分只是一个变量的函数。由于在现有情形下两部分是相等的，故(6.89)式的每一部分都必须等于一常数。将此常数记作 h_n，则有

$$\hat{F}(\Theta_n) = -\frac{4R_E^2\Omega_E^2}{gh_n}\Theta_n \tag{6.93}$$

一组 h_n 值就是 Laplace 潮汐方程的一组本征值。类比于海洋潮汐理论，h_n 即被称为大气的**等值深度**，把(6.90)代入(6.93)式，有

$$d_\mu\left(\frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2}d_\mu\Theta\right)-\frac{1}{f^2-\mu^2}\left(\frac{m(f^2+\mu^2)}{f(f^2-\mu^2)}+\frac{m^2}{1-\mu^2}\right)\Theta_n+\frac{4R_E^2\Omega_E^2}{gh_n}\Theta_n=0 \tag{6.94}$$

其中 $\mu=\cos\theta$。这一方程仅在下述三种颇为特殊的情况下才有简单解：不转动的地球、无限大的等值深度、$m=0$ 的半日潮。

在最后一种情形中 $m=0$ 且 $f=1$，于是有

$$d_\mu^2\Theta_n+\frac{4R_E^2\Omega_E^2}{gh_n}\Theta_n=0 \tag{6.95}$$

等值深度既可利用数学条件求得 ——Θ 为一具有连续微商的、唯一确定的、单值的单调函数；也可利用物理条件求得—— $v_{1\theta}$ 在南、北两极都应为 0。这些条件仅当 $2R_E\Omega_E/\sqrt{gh_n}=n\pi/2$ 时才能被满足，这时的等值深度为 $h_n=\frac{16R_E^2\Omega_E^2}{n^2\pi^2g}\Theta_n=\infty$，35.04km，8.76km，3.89km…(分别对应于 $n=0,1,2,3,\cdots$)。

然而，普遍说来，有可能得出三阶递推关系，为此须将 Hough 函数以相关联的 Legendre 多项式之和表示出：

$$\Theta_n^{\omega,m}=\sum_{l=m}^{\infty}C_{n,l}^{\omega,m}P_l^m(\cos\theta)$$

太阳潮模式表示为 S_s^m，而太阴潮表示为 L_s^m，其中 s 满足关系 $\omega=2\pi s/24$，ω 的单位分别为恒星时(59′4.09″)和太阴时(62′5.00″)的倒数。最重要的三种大气潮是：$m=2$ 而 $f=1$[①] 的半日太阳潮 S_2^2；$m=1$ 而 $f=0.5$ 的全日太阳潮 S_1^1 以及 $m=2$ 而 $f=0.965$ 的半日太阴潮 L_2^2。

(2)铅直结构方程

用分离变量法从(6.89)式得到的第二个方程为

$$HL_n''+(H'-1)L_n'+\frac{1}{h_n}\left(H'+\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)L_n=\frac{\gamma-1}{\gamma^2gHh_n}J_n \tag{6.96}$$

① 实际上 $f=0.99727$，因为 S_2^2 模式的周期为 12 恒星时，而 Ω_E 的周期为 12 太阳时(60′00″)。类似说明适用于所有的太阳潮。

为了将此方程转换为标准形式，将高度变换为标高单位：

$$x=\int_0^z\frac{\mathrm{d}z}{H}$$

于是

$$\mathrm{d}_x^2L_n-\mathrm{d}_xL_n+\frac{1}{h_n}\left(\mathrm{d}_xH+\frac{(\gamma-1)H}{\gamma}\right)L_n=\frac{\gamma-1}{\gamma^2gh_n}J_n$$

利用形如(6.20)式的标准变换

$$L_n=y_n\exp\left(+\frac{x}{2}\right)$$

可将上式变换为

$$\mathrm{d}_x^2y_n-\frac{1}{4}\left[1-\frac{4}{h_n}\left(\frac{(\gamma-1)H}{\gamma}+\mathrm{d}_xH\right)\right]y_n=\frac{(\gamma-1)J_n}{\gamma^2gh_n}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\quad(6.97)$$

对于其余大气参量也可用同第 2.6 节中一样的方法导出其表达式，如以 Hough 函数展开潮势：

$$\Phi=\sum_n\Phi_n(x)\Theta_n$$

即可求得(指数式因子 $\exp[\mathrm{i}(-\omega t+m\phi)]$皆被省略)

$$p_1=\sum_n\frac{p_0(0)}{H(x)}\left[-\frac{\Phi_n}{g}\exp(-x)+\frac{\gamma h_n}{\mathrm{i}\omega}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\left(\mathrm{d}_xy_n-\frac{y_n}{2}\right)\right]\Theta_n$$

$$v_{1z}=\sum_n\left[\gamma h_n\exp\left(\frac{x}{2}\right)\left\{\mathrm{d}_xy_n+\left(\frac{H}{h_n}-\frac{1}{2}\right)y_n\right\}-\frac{\mathrm{i}\omega}{g}\Phi_n\right]\Theta_n$$

$$v_{1\theta}=\sum_n\frac{\gamma gh_n}{4R_E\Omega_E^2}\exp\left(\frac{x}{2}\right)\left(\mathrm{d}_xy_n-\frac{y_n}{2}\right)\frac{1}{f^2-\cos^2\theta}\left(\mathrm{d}_\theta+\frac{m\cos\theta}{f}\right)\Theta_n$$

$$v_{1\phi}=\sum_n\frac{i\gamma gh_n}{4R_E\Omega_E^2}\exp\left(\frac{x}{2}\right)\left(\mathrm{d}_xy_n-\frac{y_n}{2}\right)\frac{1}{f^2-\cos^2\theta}\left(\frac{\cos\theta}{f}\mathrm{d}_\theta+\frac{m}{\sin\theta}\right)\Theta_n$$

$$\rho_1=\sum_n\frac{p_0(0)}{(gH)^2}\left\{-\Phi_n\exp(-x)\left(1+\frac{1}{H}\mathrm{d}_xH\right)+\frac{\gamma gh_n}{\mathrm{i}\omega}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\left[\left(1+\frac{1}{H}\mathrm{d}_xH\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\mathrm{d}_xy_n-\frac{y_n}{2}\right)+\frac{H}{h_n}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}+\frac{1}{H}\mathrm{d}_xH\right)y_n\right]-\frac{\gamma-1}{\mathrm{i}\omega\gamma}J_n\right\}\Theta_n$$

$$T_1=\sum_n\frac{M}{R}\left\{\frac{\Phi_n}{H}\mathrm{d}_xH\exp(-x)-\frac{\gamma gh}{\mathrm{i}\omega}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\left[\frac{\gamma-1}{\gamma h_n}H+\frac{1}{H}\mathrm{d}_xH\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\mathrm{d}_x+\frac{H}{h_n}-\frac{1}{2}\right)\right]y_n+\frac{\gamma-1}{\mathrm{i}\omega\gamma}J_n\right\}\Theta_n$$

(6.98)

$z=0$ 处的边界条件 $v_{1z}=0$ 即意味着

$$\mathrm{d}_xy_n+\left(\frac{H_s}{h_n}-\frac{1}{2}\right)y_n=\frac{\mathrm{i}\omega}{\gamma gh_n}\Phi_n\quad(6.99)$$

而"上边界条件"可从"铅直结构方程"(6.97)得到。该方程在等温大气情形的通

解为

$$y = A\exp(\mathrm{i}qz) + B\exp(-\mathrm{i}qz)$$

其中

$$q = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{(\gamma-1)H}{\gamma h} - \frac{1}{4}}$$

标准的边界条件要求辐射条件并设 $B=0$。在此情况下 $q=\sqrt{\frac{1}{Hh}\left[\frac{\gamma-1}{\gamma}+\mathrm{d}_z H\right]-\frac{1}{4H^2}}$ 的作用就像一铅直波数。如 q 在任一给定高度均为实数，即为内波模式而能量的铅直传播就是可能的，但对于虚数的 q 波就是渐消波而能量的铅直传播被禁制。

第 7 章　计算大气声学①

以上各章讨论了大气声学的基本问题，本章将以不同方法来讨论由这些基本问题导出的一个最基本课题：从给定声源出发的声波在大气中经历一系列物理过程(几何扩展、从复阻抗界面上反射、在一定剖面的大气中折射和衍射、在各种不均匀性上散射、被大气吸收等)之后，如何在接收点精确评估其“传输损失(TL)”。在一般分析中，像我们在以上各章中所分别讨论过的，为了便于处理问题，各种物理过程的影响都是分开来考虑的，而在实际情况中，这些因素自然是同时地、综合地起作用的(固然不一定所有因素都会全部同时出现)，这就使原本就非常复杂的问题更加复杂，往往使一般分析方法显得无能为力。

正如在第 2 章中所指出的，绝大多数传播问题都归结为在一定剖面和定解条件下求解波动方程或 Helmholtz 方程；近年来，在大气声学中还日益广泛地注意到大气中的折射和有限地面阻抗二者综合效应的问题，这时全波分析解[178,179]或简正波算法仍不失为最基本手段，即以分离变量法解波动方程，用 Hankel 积分变换后再用留数定理将场表示为各阶简正波之级数和。当频率较高时，须计算到相当高阶的简正波，从而需要较大量的计算机时；另 -方面，这种方法也只适用于阻抗地面上空某些类型的大气剖面，面对更一般的剖面则很难求解。

射线导迹[180]是应用相当普遍的另一基本算法，它近似地描绘出大气中的折射路径，但不易显示低频波动现象，其适用条件可用以下方式来表述[181]：

(1) 折射率 n、其空间变化率 n' 和声波波长 λ 应满足关系 $n^2 \gg \lambda n'$；

(2) 声波振幅 A 的对数的空间变化率应满足条件 $(\ln A)' < 1/\lambda$；

(3)传播距离 R 与掠角 θ 应满足 $(\lambda/2\pi R)^{1/3} < \theta$。

可以看出，随着 λ 的增加(频率降低)，上述各个条件愈来愈难以满足。大气中最常见的低频声源是爆炸，自然的和人工的高能量爆炸所产生的压力波(参阅第 10 率第 10.3 节)被逐渐折射到高层大气中去，这时 n' 都非常小，射线寻迹程序可以精确预告离声源相对近的“寂静区”以及远处由于折射聚焦所产生的“可闻区”。

---

① 在本书第一版中，作者曾在此处加有脚注：“这一术语(指‘计算大气声学’)迄今尚未在文献中正式见到，尽管在若干相近领域中类似的命名已陆续通用，如计算流体力学、计算声学以至计算水声学等。无论如何，属于这一范畴的实际工作近年来与日俱增，因此看来这一领域的最终形成应是指日可待”。而在第一版出版四年之后，即 2001 年，果然有计算大气声学的专著[177]出版，这说明作者的预言得到完全的证实。但该专著只着重论述了 FFP 和 PE 法而对本章后两节所论述的方法并无涉及；在此第二版中，作者根据该专著和近年的其他文献特别对前两节作了全盘的修改和补充。

对于能量较低的声源，其所产生的声波在经高层大气(全)反射后不足以达到可检测声级，这种情况下 n' 就可以相当大，射线寻迹就难以预告远程传播情况，而波动方程的数值解就成为必需的了。

数值解法有多种形式，应用场合、范围各不相同，也各有利弊。例如，有限元法应是最精确的，但计算过于冗繁，对几米以上的传播距离就需要用超级计算机算几个小时，因而在实用上多作为一种辅助手段与其他算法配合使用。其他的主要算法包括快速场程序(FFP)、抛物方程(PE)法、修正的射线寻迹程序等。下面就分别对这些方法的基本概念作一简明扼要的阐述。

7.1 快速场程序(FFP)

快速场程序(FFP)是计算地面上空分层大气中单极子源声场的一种数值方法。地面为地面阻抗所表征而大气由温度梯度和风速梯度描述。声速随高度的连续变化(剖面)为一分层的不连续变化所取代，每一层中的声速均假定为常数。接收点处的声压作为水平波数 k 的函数计算出来，然后用快速 Fourier 变换(FFT)作为 Hankel 变换的一种近似以求出声压作为离开声源距离 r 的函数。适当计及地面反射后 FFP 在相当广泛的气象条件下都具有给出声场预报的潜力。特别是，这种算法在影区和声压增强条件出现在同一投影平面内时能够给出可靠的预报。由于空间域内的声场系用逆 Fourier 变换由水平波数域内的声场算出，因此 FFP 有时也被称为"波数积分法"[182]。

像所有线性方法一样，这种方法所得到的解在射线发生交叉的区域内必定会有误差，然而这解的本性使得这些误差大都比"射线不变模型"①所产生的小得多。

FFP 原本是为水声学发展起来的②，应用到大气声传播上则不过是二十年前的事[184~186]，Raspet[187]和 Lee[188]等人发展出一种为大气声学所用的 FFP 法；这是一种适用于轴对称大气的二维方法，以"有效声速"计入风的影响。Nijs-Wapenaar[189]和 Wilson[190]对运动大气发展出三维计算法，可看成是广义的 FFP 法。在文献[184]中采用的矩阵表示产生了相当大的数值误差，文献[185]用一梯形电网络来取代分层的大气，这样就有可能利用更稳定和较不易出错误的数字程序，后来这一方法得到进一步的发挥，其中值得特别一提的是 Wilson 未正式发表的论文[191]，对文献[185]中方法作出修正后允许每层中的声速不限于是常数而可以是

① 指完全受射线控制的传播模型，这时声级预报由射线给出。条件是：(i) 地面反射可忽略；(ii) 射线曲率仅在比波长大得多的距离上发生变化；(iii) 传播行为与频率无关。在气象效应产生显著影响的"增强"区域内，表明这种模型可对远程传播给出可靠预报[183]。

② 参阅，例如，H. W. Kutschale, Report No. CU-1-70, Columbia Univ., New York; Palisades. 1970; F. R. Di Napoli, NUSC Tech. Report 4103, Washington D. C; Naval Underwater Systems Center. 1971。

高度的线性函数。

7.1.1 Helmholtz 方程、轴对称近似

首先在直坐标系下写出连续性方程(1.31′)(线性化后的一级近似)

$$\partial_t\rho + v_{0x}\partial_x\rho + v_{0y}\partial_y\rho + v_z\partial_z\rho_0 + \rho_0(\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z) = 0 \tag{7.1}$$

再将声波中的运动方程(1.30a)写成其三个分量方程:

$$\begin{aligned}
&\partial_t v_x + v_{0x}\partial_x v_x + v_{0y}\partial_y v_x + v_z\partial_z v_{0x} + \frac{1}{\rho_0}\partial_x p = 0\\
&\partial_t v_y + v_{0x}\partial_x v_y + v_{0y}\partial_y v_y + v_z\partial_z v_{0y} + \frac{1}{\rho_0}\partial_y p = 0\\
&\partial_t v_z + v_{0x}\partial_x v_z + v_{0y}\partial_y v_z + \frac{1}{\rho_0}\partial_z p = 0
\end{aligned} \tag{7.2}$$

最后同样在一级近似下写出状态方程(1.32):

$$\partial_t p + v_{0x}\partial_x p + v_{0y}\partial_y p + v_z\partial_z p_0 = c^2(\partial_t\rho + v_{0x}\partial_x\rho + v_{0y}\partial_y\rho + v_z\partial_z\rho_0) \tag{7.3}$$

将 Fourier 变换应用到各相关变量上:

$$p \to P, \rho \to \Omega, v_x \to U, v_y \to V, v_z \to W$$

则对(7.1)式、(7.2)式和(7.3)式作 Fourier 变换后即得:

$$\begin{aligned}
&\eta\Omega + \rho'_0 W + \rho_0(\mathrm{i}k_x U + \mathrm{i}k_y V + W') = 0\\
&\eta U + v'_{0x}W + \rho_0^{-1}\mathrm{i}k_x P = 0\\
&\eta V + v'_{0y}W + \rho_0^{-1}\mathrm{i}k_y P = 0\\
&\eta W + \rho_0^{-1}P' = 0\\
&\eta P = c^2(\eta\Omega + \rho'_0 W)
\end{aligned} \tag{7.4}$$

其中 $\eta = -\mathrm{i}\omega + \mathrm{i}k_x v_{0x} + \mathrm{i}k_y v_{0y}$,而撇号表示对 z 的微商。从上式中第二至第五式可用 P 表出 U、V、W 和 Ω 等各量;以之代人第一式并略去若干小量之后即给出

$$P'' - \left(\frac{2\eta'}{\eta} + \frac{\rho'_0}{\rho_0}\right)P' - \left(\frac{\eta^2}{c^2} + k_x^2 + k_y^2\right)P = 0 \tag{7.5}$$

引人波数

$$k_m = k - k_x m_x - k_y m_y$$

其中 $m_x = v_{0x}/c$ 而 $m_y = v_{0y}/c$,从而

$$k_{mz}^2 = k_m^2 - k_x^2 - k_y^2$$

故(7.5)式可写为

$$P'' - 2\frac{k'_m}{k_m}P' + k_{mz}^2 P = 0 \tag{7.6}$$

也可写为

$$k_m^2\partial_z(k_m^{-2}\partial_z P) + k_{mz}^2 P = 0 \tag{7.6'}$$

此式可看成是水平波数域内的 Helmholtz 方程，它是 FFP 法的基本方程。如在 $r_s=(0,0,z_s)$ 处有一单位振幅的单极子声源，则相应的非齐次 Helmholtz 方程就是

$$k_m^2\partial_z(k_m^{-2}\partial_z P)+k_{mz}^2 P=-4\pi\delta(z-z_s) \tag{7.7}$$

也可将(7.6′)式转化为空间域内的 Helmholtz 方程，在此情形下有 $m_x=0, m_y=0, k_m=k$。于是(7.6′)式成为

$$k^2\partial_z(k^{-2}\partial_z P)+(k^2-k_x^2-k_y^2)P=0 \tag{7.8}$$

逆 Fourier 变换即给出复声压振幅 $p_c(r)$ 的 Helmholtz 方程

$$k^2\nabla\cdot(k^{-2}\nabla p_c)+k^2 p_c=0 \tag{7.9}$$

轴对称近似就是略去声场随方位角 ϕ 的变化，在许多实际情况下这都是一个很好的近似，因风和温度随方位角 ϕ 的变化通常都远小于它们随高度 z 的变化，它是表述大气二维问题的基础，广泛用于各种二维数值计算法中。为此先来描述分层大气(以"有效声速"(或相应的"有效波数" k_{eff})计及风的影响)中声场的轴对称近似。

假定声场是由一点声源产生的；采用柱坐标 $rz\varphi$，令其 z 轴沿着通过声源的铅直线(见图 45)，方程(7.9)即成为

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r p_c)+k_{eff}^2\partial_z(k_{eff}^{-2}\partial_z p_c)+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 p_c+k_{eff}^2 p_c=0 \tag{7.10}$$

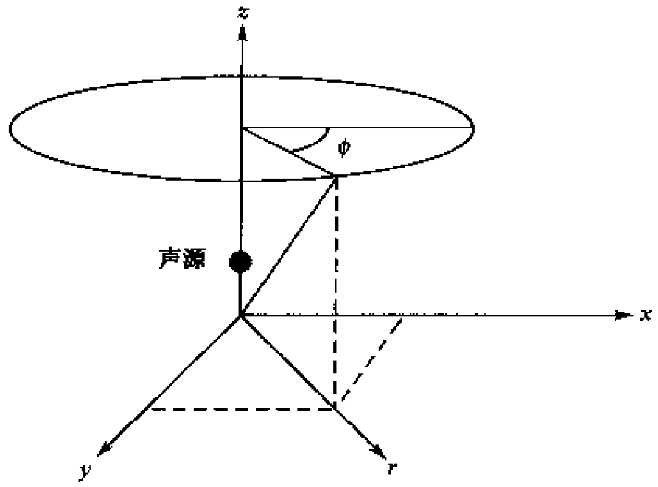


图 45　直坐标 xyz 和柱坐标 $rz\varphi$

在轴对称近似下我们略去声场随方位角 φ 的变化，所以上式左端第三项为 0。引进下式所定义的新变量 q_c 来替换 p_c：

$$q_c=p_c\sqrt{r} \tag{7.11}$$

(7.10)即成为

$$\partial_r^2 q_c + \frac{1}{4r^2}q_c + k_{\mathrm{eff}}^2\partial_z(k_{\mathrm{eff}}^{-2}\partial_z q_c) + k_{\mathrm{eff}}^2 q_c = 0 \tag{7.10'}$$

应用远场近似 $r \gg k_{\mathrm{eff}}^{-1}$，以致左端第二项可以略去，从而得到二维 Helmholtz 方程

$$\partial_r^2 q_c + k_{\mathrm{eff}}^2\partial_z(k_{\mathrm{eff}}^{-2}\partial_z q_c) + k_{\mathrm{eff}}^2 q_c = 0 \tag{7.10a}$$

现在来导出水平波数域中相应的非齐次 Helmholtz 方程。由方程(7.7)我们有

$$k_{\mathrm{eff}}^2\partial_z(k_{\mathrm{eff}}^{-2}\partial_z P) + (k_{\mathrm{eff}}^2 - k_x^2 - k_y^2)P = -4\pi\delta(z - z_s) \tag{7.12}$$

其中 Fouier 变换 P 由下式给出

$$P(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mathrm{i}k_x x - \mathrm{i}k_y y)p_c(\boldsymbol{r})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在轴对称近似下 p_c 只是 r 和 z 的函数，上式就成为

$$P(k_r, k_y, z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\exp(-\mathrm{i}k_x r\cos\phi - \mathrm{i}k_y r\sin\phi)p_c(\boldsymbol{r})r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \tag{7.13}$$

以之代人(7.12)式，并计及(7.11)式即得

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\exp(-\mathrm{i}k_x r\cos\phi - \mathrm{i}k_y r\sin\phi)[k_{\mathrm{eff}}^2\partial_z(k_{\mathrm{eff}}^{-2}\partial_z q_c) + (k_{\mathrm{eff}}^2 - k_x^2 - k_y^2)q_c]$$
$$\times\sqrt{r}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = -4\pi\delta(z - z_s) \tag{7.14}$$

如写出 $k_x = k_r\cos\psi, k_y = k_r\sin\psi$，则上式成为

$$\int_0^{\infty}[k_{\mathrm{eff}}^2\partial_z(k_{\mathrm{eff}}^{-2}\partial_z q_c) + (k_{\mathrm{eff}}^2 - k_r^2)q_c]\sqrt{r}\int_0^{2\pi}\exp(-\mathrm{i}k_r r\cos[\phi - \psi])\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r$$
$$= -4\pi\delta(z - z_s) \tag{7.14'}$$

对 φ 的积分即为零阶 Bessel 函数 $J_0(k_r r)$，而当 $k_r r$ 很大时可采用其渐近表达式

$$J_0(k_r r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_r r}}\cos\left(k_r r - \frac{\pi}{4}\right)$$

于是(7.14′)即成为(当 $k_r r$ 很大时)

$$\int_0^{\infty}[k_{\mathrm{eff}}^2\partial_z(k_{\mathrm{eff}}^{-2}\partial_z q_c) + (k_{\mathrm{eff}}^2 - k_r^2)q_c]2\sqrt{\frac{2\pi}{k_r}}\cos\left(k_r r - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}r = -4\pi\delta(z - z_s) \tag{7.15}$$

定义：

$$Q(k_r, z) = \int_0^{\infty}q_c\cos\left(k_r r - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}r = \int_0^{\infty}\left[\frac{q_c}{\sqrt{2}}\cos(k_r r) + \frac{q_c}{\sqrt{2}}\sin(k_r r)\right]\mathrm{d}r \tag{7.16}$$

即求得

$$k_{\mathrm{eff}}^2\partial_z(k_{\mathrm{eff}}^{-2}\partial_z Q) + (k_{\mathrm{eff}}^2 - k_r^2)Q = -\sqrt{2\pi k_r}\delta(z - z_s) \tag{7.17}$$

用 FFP 法数值解出此方程即可计算出函数 $Q(k_r, z)$，而声场 $q_c(r, z)$ 就可用与(7.16)式相对应的逆 Fouier 变换求出

$$q_c = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Q(k_r, r)\cos(k_r r)\mathrm{d}k_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Q(k_r, r)\sin(k_r r)\mathrm{d}k_r \tag{7.18}$$

通过估算(7.14′)中对方位角 φ 的积分，我们将三维问题退化为二维问题；在推导中我们假定 p_c 与方位角 φ 无关，这一假定对不运动的分层大气是正确的，但对运动大气就不正确了，因声波顺风传播比逆风传播时快。然而，作为一种近似，运动大气可用具有“有效声速”的不运动大气来替换，这样轴对称假定依然可用。

7.1.2　Helmholtz 方程的解

将由波数 $k(z)$ 所表征的大气分为一系列水平均匀层(图46)，每层之间分界面的高度记作 $z_j(j=1,2,\cdots,N)$，地面为 $z_1=0$；声源高度与第 m 层界面重合，故 $z_s=z_m$。这时的非奇次 Helmholtz 方程可写为

$$(\partial_z^2+k_z^2)P=-S_\delta\delta(z-z_s) \tag{7.19}$$

其中在三维情形下 $S_\delta=4\pi, k_z^2=k^2-k_x^2-k_y^2$；而在二维情形下 $S_\delta=\sqrt{2\pi k_r}, k_z^2=k^2-k_r^2$。将方程(7.19)在层 j 中的解写为

$$P_j=A_j\exp(\mathrm{i}k_{zj}z)+B_j\exp(-\mathrm{i}k_{zj}z), z_j\leqslant z\leqslant z_{j+1} \tag{7.20}$$

其中 k_{zj} 为 k_z 在该层中的值；而 A_j 和 B_j 为常数。在 z_{N-1} 和 z_N 之间最高层的顶上我们设 $B_{N-1}=0$，故在那里仅有向上行进的波。这意味着应将最高的一层选在声波向下折射到接收器的区域之上；这一区域的高度通常随着声源到接收器之间距离的增加而增加。方程(7.19)在地面之下区域内($z\leqslant 0$)的解可写为

$$P_0=B_0\exp(-\mathrm{i}k_0z), z\leqslant 0 \tag{7.21}$$

其中 B_0 为常数而 k_0 为地面下区域内的复波数。

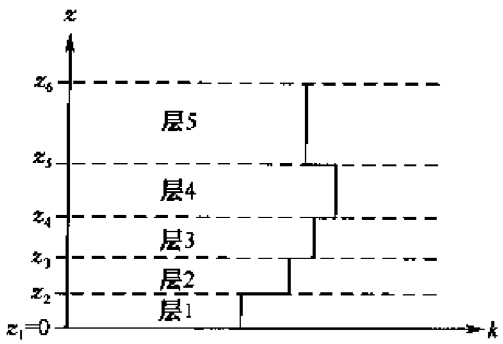


图46　将大气划分为一系列水平均匀层(每层中波数 k 为常数)以近似地表示剖面 $k(z)$

各常数 A_j、B_j 决定于各分界面上的边界条件。除在声源高度 z_s 上的分界面以外，在所有分界面上声压和法向速度都是连续的，而在该分界面上只有声压是连续的但法向速度不连续。

现在来写出各分界面上的边界条件。由(7.4)中第三式得出 $W=-\eta^{-1}\rho_0^{-1}P'$。这给出如下的边界条件：

$$\begin{aligned} &P_j(z_j)=P_{j-1}(z_j) && \text{对于 } j=1,2,\cdots,N \\ &\eta_j^{-1}\rho_j^{-1}\partial_zP_j(z_j)=\eta_{j-1}^{-1}\rho_{j-1}^{-1}\partial_zP_{j-1}(z_j) && \text{对于 } j=2,3,\cdots,N(j\neq m) \\ &\partial_zP_j(z_j)=\partial_zP_{j-1}(z_j)-S_\delta && \text{对于 } j=m \\ &\rho_j^{-1}\partial_zP_j(z_j)=\rho_{j-1}^{-1}\partial_zP_{j-1}(z_j) && \text{对于 } j=1 \end{aligned} \tag{7.22}$$

其中 η_j 和 ρ_j 分别为 η 和 ρ_0 在层 j 中的值；剖面 $k(z)$ 这种“阶梯式近似”在 $z=z_m$ 处的不连续性运算时可以忽略，因为实际剖面在该处是连续的。

(7.22)中第二、四两式中 $\eta_j^{-1},\eta_{j-1}^{-1},\rho_j^{-1},\rho_{j-1}^{-1}$ 等因子的作用通常很小，从而可以略去。在具有等效声速的无运动大气的二维情形下，$\eta=-\mathrm{i}\omega$ 而 $\eta_j^{-1}=\eta_{j-1}^{-1}$。在三维情形下，$\eta=-\mathrm{i}ck_m$ 而 $\eta_j^{-1}\approx\eta_{j-1}^{-1}$。由于在地面 $z_1=0$ 上 $v_{0x}=v_{0y}=0$ 从而 $\eta_1=\eta_0$，故第二、四两式是相容的。

$z_1=0$ 上的边界条件给出关系式

$$A_1=R(k_{z1})B_1 \tag{7.23}$$

其中

$$R(k_{z1})=\frac{k_{z1}-k(z_1)/Z_S}{k_{z1}+k(z_1)/Z_S} \tag{7.24}$$

为平面波反射系数；Z_S 为地面的法向阻抗。对于一局部反应地面，Z_S 就等于地面材料的法向特性阻抗。

其余的边界条件可用来导出一组方程，从中即可解出常数 A_j 和 B_j。但另有一个更容易的办法，即从(7.20)式求出层 j 中对于 z 和 $z+\Delta z$ 的关系式

$$\begin{aligned}P_j(z+\Delta z)&=\cos(k_{zj}\Delta z)P_j(z)+k_{zj}^{-1}\sin(k_{zj}\Delta z)P_j'(z)\\P_j'(z+\Delta z)&=-k_{zj}\sin(k_{zj}\Delta z)P_j(z)+\cos(k_{zj}\Delta z)P_j'(z)\end{aligned} \tag{7.25}$$

其中的 $\cos w$ 和 $\sin w$ 对于复变量 w 分别定义为 $(1/2)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w})$ 和 $(1/2\mathrm{i})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w})$。这些关系式将用来确定 $P_j(z_j)$。

现在我们分别从地面和顶部外推到声源。先从地面 $z_1=0$ 开始，暂时随意地设定 $B_1=1$。从(7.20)式和(7.23)式求得

$$\begin{aligned}P_1(z_1)&=R(k_{z1})+1\\P_1'(z_1)&=\mathrm{i}k_{z1}[R(k_{z1})-1]\end{aligned} \tag{7.26}$$

$P_{j-1}(z_j)$ 和 $P_{j-1}'(z_j)$ 等各个量的值皆可用(7.26)式、(7.25)式(在其中令 $z=z_j$ 和 $\Delta z=z_{j+1}-z_j$)以及(7.22)中的第一、二式对 $j=2,3,\cdots,m$ 依次求出。将声源高度 z_m 处最后的 $P_{m-1}(z_m)$ 和 $P_{m-1}'(z_m)$ 值分别记作 $P_{m下}$ 和 $P_{m下}'$，这里的下标“下”表示“声源以下区域”。

接下来再从顶部 z_N 开始，这时暂设 $P_{N-1}(z_N)=1$。在(7.20)式中令 $B_{N-1}=1$ 求得

$$\begin{aligned}P_{N-1}(z_N)&=1\\P_{N-1}'(z_N)&=\mathrm{i}k_{z_N}\end{aligned} \tag{7.26$'$}$$

$P_j(z_j)$ 和 $P_j'(z_j)$ 等各个量的值皆可用(7.26′)式、(7.25)式(在其中令 $z=z_{j+1}$ 和 $\Delta z=z_j-z_{j+1}$)以及(7.22)中的第一、二式对 $j=N-1,N-2,\cdots,m$ 依次求出。将声源高度 z_m 处最后的 $P_m(z_m)$ 和 $P_m'(z_m)$ 值分别记作 $P_{m上}$ 和 $P_{m上}'$，这里的下标“上”表示“声源以上区域”。

7.1.3 接收器处的场

由于我们随意地设定了 $B_1=1$ 和 $P_{N-1}(z_N)=1$，P_j 和 P_j' 的数值就还不正确，而

仅仅比值 P_j'/P_j 是正确的。在声源所在高度 z_m 我们从(7.22)中第三式有

$$\left(\frac{P'_{m上}}{P_{m上}}\right)P_m - \left(\frac{P'_{m下}}{P_{m下}}\right)P_m = S_\delta \tag{7.27}$$

其中 P_m 为高度 z_m 上 P 的正确值。这给出

$$P_m = \frac{-S_\delta}{(P'_{m上}/P_{m上}) - (P'_{m下}/P_{m下})} \tag{7.28}$$

现将上文计算所定出的 P_j 值乘以如下因子，即解可得到正确定标：

$$\begin{aligned} &(P_m/P_{m上}) \qquad 对于\ z_j > z_m \\ &(P_m/P_{m下}) \qquad 对于\ z_j < z_m \end{aligned} \tag{7.29}$$

最后，P_j 的逆 Fourier 变换即给出空间区域内的复声压振幅。在三维情形下

$$p_c(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ik_x x + ik_y y)P(k_x,k_y,z)dk_x dk_y \tag{7.30}$$

在二维情形下，用 Q 代替 P，从(7.18)式得到

$$q_c(r,z) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\exp(ik_r r) + \exp(-ik_r r)]Q(k_r,z)dk_r \tag{7.31}$$

先考虑二维情形。(7.31)式中被积式在积分路径靠近 $k_r=-k$ 和 $k_r=k$ 处有极点，这可由无地面均匀大气的解析解看出：

$$Q(k_r,z) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{k_r}}{k_z}\exp(ik_z|z-z_s|),\quad k_z^2 = k^2 - k_r^2 \tag{7.32}$$

此解自然与不均匀大气的解略有不同，但极点附近的区域仍然支配着(7.31)式中的积分。为了避开极点，我们不沿着实轴、而沿着图 47 中所示的积分路径来积分。对于正的 k_r，我们引进一小虚项 $-ik_t$；而对于负的 k_r，则引进反号的虚项 $+ik_t$；这里 k_t 为一小正数。这一选择相当于 $k_r^2>k^2$ 时 k_z 的一正虚部，故从(7.32)式可看出当 $k_r\to\pm\infty$ 时 $Q\to 0$。应注意：在(7.31)式中，因子 $\exp(\pm k_t r)$ 可被移出积分 $\int\exp(\pm ik_r r)Qdk_r$ 之外，因而积分仍然可用标准的 Fourier 技术来完成。

利用关系 $Q(-k_r,z)=\pm iQ(k_r,z)$，可将(7.31)式中的积分转换为只对正波数 k_r 的积分，于是该式可写为

$$q_c(r,z) = \frac{1-i}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{\infty}[\exp(ik_r r) + \exp(-ik_r r)]Q(k_r,z)dk_r \tag{7.31a}$$

为了数值估算此积分，将积分变量 k_r 离数化为

$$k_{r,n} = k_{s,n} - ik_t \qquad (n = 1,2,\cdots,M),$$

其中，k_t 如上所述为一小正数，而 $k_{s,n}=\frac{1}{2}\Delta k,\frac{3}{2}\Delta k,\cdots,k_{s,M}$ 为实部；Δk 为波数间隔。(7.31a)所给出的解 q_c 因离散化而对 r 成为周期性的，其周期距离为 $2\pi/\Delta k$。

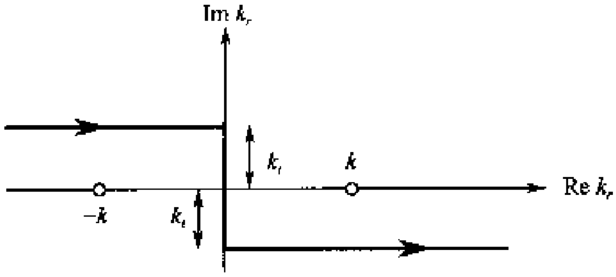


图 47 避开实轴上 $k_r=\pm k$ 处极点的积分路径

波数间隔 Δk 应选得足够小以保证接收器处的 q_c 值不会受此周期性的影响；例如可选 $2\pi/\Delta k\geqslant 3r$。最大波数 $k_{s,M}$ 的选择依赖于频率，因前已看到积分由极点 $k_r=k=\omega/c_{\rm eff}$ 处附近的波数所支配；建议可采用 $k_{s,M}\approx 3\omega/c_0$，这里 c_0 为 $z=0$ 处的声速。至于小正数 k_t 则可用 Δk 的值。

(7.31a)式中的积分区间在最大波数 $k_{s,M}$ 处的截断导致 q_c 作为 r 的函数产生微小而快速的振荡。这可用在(7.31a)式的被积函数中引进一窗函数因子的办法容易地得到消除；此函数除了在积分限附近平滑地趋于 0 外处处等于 1。

现在来考虑三维情形的(7.30)式。如在二维情形一样，均匀大气的解正比于 k_z^{-1}。这意味着在实 k_xk_y 积分平面上有极点存在。极点的位置依赖于接收器的坐标 x 和 y。如 $y=0$ 极点就都在 k_x 轴上，在 $(k_x,k_y)=(-k,0)$ 和 $(k_x,k_y)=(k,0)$ 处。在此情况下 k_x 的积分区间可选为 $[-3k_0,\ 3k_0]$，而 k_y 的积分区间可选为 $[-k_0,\ k_0]$，$k_0=\omega/c_0$。同二维情形一样，积分变量被离散化而极点用在 k_x 和 k_y 中引进小虚项的办法来避开。$y=0$ 时极点都在 k_x 轴上，而我们从二维情形得知：k_x 的虚部对于 $k_x>0$ 必须为负，而对于 $k_x<0$ 则必须为正(见图 47)。因此一种可能的选择为[190]

$$
\begin{aligned}
k_{x,m} &= k_{sx,m} - \mathrm{i}k_t\cos\theta_{mn} \\
k_{y,n} &= k_{sy,n} - \mathrm{i}k_t\sin\theta_{mn}
\end{aligned}
\tag{7.33}
$$

其中 $k_{sx,m}$ 和 $k_{sy,n}$ 为实 k_xk_y 平面上的离散化变量，$\theta_{mn}=\arctan(k_{sy,n}/k_{sx,m})$ 为矢量 $(k_{sx,m},k_{sy,n})$ 从 0 扫至 2π 的极角。也如在二维情形一样，必须用一窗函数来消除积分区间被截断所导致的那种虚假的效应。

7.1.4 数值计算精度的增进

以上所述计算方法的效率决定于划分大气水平层的数目，而这一数目又依赖于声速和风速的铅直剖面。在铅直梯度很大的高度上必须将层分得很薄，而在梯度很小的高度上就可以用厚的层。对于均匀大气，两层就够了。

如层的数目很大，必须注意到在重复应用(7.25)式来计算各个 P_j 时所带来

的数值误差。这些误差主要来源于(7.25)中的因子 $\exp(\pm ik_{zj}\Delta z)$。在计算$j=2,3,\cdots,m$ 的各个(未定标的)P_j 时,由于因子 $\exp(-ik_{zj}\Delta z)$中含有虚部 k_{zj},P_j 可能会随着 j 的增加而变得很大。类似地,在计算 $j=N-1,N-2,\cdots,m$ 的各个P_j 时,由于因子 $\exp(+ik_{zj}\Delta z)$中含有虚部 k_{zj},P_j 可能会在声源附近变得很大。这个问题可以这样来解决:在每一步增 $z\to z+\Delta z$ 之后将 P_j 和 P_j'乘以下列因子

$$\exp(ik_{z0}\Delta z) \qquad 对于\ \Delta z>0$$
$$\exp(-ik_{z0}\Delta z) \qquad 对于\ \Delta z<0$$

这些因子并不影响比值 P_j'/P_j。在对 P_j 的正确值作最后定标时必须计入倒数因子,这在定标因子(7.29)中给出一个附加因子 $\exp(ik_{z0}|z-z_0|)$。

对于波数 k_{z0}可取,例如,声源高度上的铅直波数。在其中声场有待计算的最高位置以上的各层中,还有更好的方法可用。在这里只须在对一层进行了“下行”计算之后简单地将 P_j 和 P_j'除以 P_j,这样 P_j 和 P_j'就分别为 1 和 P_j'/P_j 所取代。这种方法等效于文献[192]中所描述的“导纳外推法”。

7.1.5 二维均匀大气的 FFP 解

通过这个简单例子可以更进一步了解 FFP 法的精髓。在此情况下我们只用两个水平层:$z_1=0$ 与 $z_2=z_s(m=2)$之间的层1和 z_2与 $z_3>z_2(N=3)$之间的层 2。

(7.26)式现应写为(再次提醒:在二维问题中 $P\to Q$)

$$\begin{aligned} Q_1(z_1) &= R+1 \\ Q'_1(z_1) &= ik_z(R-1) \\ Q_{m下} &= \exp(ik_z z_s)R+\exp(-ik_z z_s) \\ Q'_{m下} &= ik_z[\exp(ik_z z_s)R-\exp(-ik_z z_s)] \end{aligned} \tag{7.34}$$

(7.26′) 应为

$$Q_{N-1}(z_N)=1$$
$$Q'_{N-1}(z_N)=ik_z$$

应用(7.25)(其中 $z=z_N,\Delta z=z_s-z_N$)给出

$$\begin{aligned} Q_{m上} &= \exp[ik_z(z_s-z_N)] \\ Q'_{m上} &= ik_z\exp[ik_z(z_s-z_N)] \end{aligned} \tag{7.34′}$$

(7.28)给出

$$Q_m = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{k_r}}{k_z}[1+R\exp(2ik_z z_s)] \tag{7.35}$$

计及定标因子(7.29),$Q_j(z_j)$的正确值为

$$Q_j(z)=i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{k_r}}{k_z}\{\exp[ik_z|z-z_s|]+R\exp[ik_z(z+z_s)]\} \tag{7.36}$$

此式对于任意的 $z>0$ 都是正确的。

如地面不存在,即 $R=0$,上式中第二项即消失。(7.31a)式给出

$$q_c = \frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\exp(\mathrm{i}k_r r + \mathrm{i}k_z|z-z_s|)\frac{\sqrt{k_r}}{k_z}\mathrm{d}k_r + \frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\times\int_0^{\infty}\exp(-\mathrm{i}k_r r + \mathrm{i}k_z|z-z_s|)\frac{\sqrt{k_r}}{k_z}\mathrm{d}k_r \tag{7.37}$$

将上式右端第一个积分写为

$$I_1 = \int_0^{\infty}\exp[\mathrm{i}F(k_r)]G(k_r)\mathrm{d}k_r$$

当 $k_r r$ 很大时,积分可用稳相法[193]求出:

$$I_1 \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|F''(k_{r,0})|}}G(k_{r,0})\exp\left[\mathrm{i}F(k_{r,0}) + \mathrm{i}\mu\frac{\pi}{4}\right] \tag{7.38}$$

其中 $\mu=\mathrm{sign}[F''(k_{r,0})]$,$\mathrm{sign}(x)$在 $x>0$ 时为 1 而在 $x<0$ 时为-1;$k_{r,0}$为稳相点处的波数,亦即方程 $F'(k_{r,0})=0$ 的解。我们求得 $k_{r,0}=rk/R_1$,而 $R_1=\sqrt{r^2+(z-z_s)^2}$,于是积分就成为

$$I_1 = \sqrt{\pi}(1-\mathrm{i})\sqrt{r}\frac{\exp(\mathrm{i}kR_1)}{R_1} \tag{7.38a}$$

(7.37)式右端第二个积分也可类似地处理,这时的稳相点在 $k_{r,0}=-rk/R_1$,已位于积分区段之外。这表示此积分相对于第一个积分可以忽略。因此(7.37)式和(7.38a)式就给出

$$q_c = \sqrt{r}\frac{\exp(\mathrm{i}kR_1)}{R_1} \tag{7.39}$$

相应地

$$p_c = \frac{\exp(\mathrm{i}kR_1)}{R_1} \tag{7.40}$$

FFP 在台式计算机上运算很慢因而非常费时,无疑仍有许多应用的场合(这时较简单的模型在运算上更有活力并能给出足够可靠的预报)。这些场合存在于可明确确定为影区或振幅增强区的条件下,在这些区的交界处必须应用 FFP。由于 FFP 是不依赖于距离的,当传播是通过非分层大气或是在其阻抗具有空间变化的地面上空进行的时,FFP 都无法给出预报。

7.2 抛物方程法 I:Crank-Nicholson 抛物方程法(CNPE)

抛物方程(PE)法是整整半个世纪以前由 Леонтович 和 Фок 提出并应用于对流层中无线电波传播①,其后又被广泛应用于量子力学、等离子体物理、地震波传

① 参阅 J. Phys. USSR, 1946, 10(1): 13, Fock V. A., Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems, New York: Pergamon, 1965。

播、光学以及水声学①等形形色色的领域中，至于在大气声学中，大约30年前才曾有过若干潜在的应用[88,194]。

PE法对大气模型(剖面)的要求是非常宽松的，它可以允许声速逐点而变，即可以在高度水平距离栅格上每一点规定声速变化[195]，PE法还可以估算大气湍流和不规则地形对声传播的影响。在PE法中，先由略去大仰角声波对声场的贡献而得出波动方程，再按由此得出的抛物方程来计算声场。因此PE法在最大仰角所界定的区域内给出精确结果。最大仰角一般从10°到70°或更高，决定于推导抛物方程时所采用的"小角近似"[182]。最大仰角10°对于声源和接收器都位于地面附近的情况通常是足够的。

PE法在大气声学中发展的关键一步是1989年由Gilbert和White完成[196]的，这种方法被称为Crank-Nicholson抛物方程法(CNPE)；还有另一种"Green函数抛物方程法(GFPE)"，它们主要适用于计算折射大气中单极子源的声场，并且都是基于轴对称近似的二维方法；近年来也发展了这两种PE的三维方法[197,198]。CNPE给出广角抛物方程的有限差分解；此解可精确到直至约35°的仰角。在广角传播和大声速梯度情况下GFPE的精度不如CNPE；但在大多数情况下GFPE还是足够精确的，GFPE的优点在于其效率，也就是说比CNPE更快。

在最普遍的形式下，PE的解亦可在远场($kr\gg1$)严格解出Helmholtz方程，利用PE比直接应用Helmholtz方程的优越性在于：PE略去了后向散射场而在距离上是完全开展的[199]，这就使得在数值计算时大大缩减了相邻栅格点之间的联系，从而降低了计算机的运行时间和对储存空间的要求。

然而，在用PE法进行数值计算之前，所作出的近似实际上会限制较大角度传播模式的精度，对这一限制的担心由一种广角PE部分地得到消除，它对与水平面成约45°的传播给出精确结果[200]，而后来文献[201]更报告了一种更高阶的PE，看来可将射线束半宽度进一步扩展到60°之多。

7.2.1　窄角PE和广角PE的导出

仍基于轴对称近似，这时二维Helmholtz方程(7.10a)中的第二项$k_{\mathrm{eff}}^2\partial_z(k_{\mathrm{eff}}^{-2}\partial_z q_c)$可近似为$\partial_z^2 q_c$，数值计算表明这一近似所带来的影响通常都可忽略不计，于是方程(7.10a)就成为

$$(\partial_r^2+\partial_z^2+k_{\mathrm{eff}}^2)q_c=0 \tag{7.41}$$

① 参阅，例如，Tappert F. D.. The parabolic approximation method. Wave Propagation and Underwater Acoustics, (ed. J. B. Keller and J. S. Papadkis), Lecture Notes in Physics, 70, Berlin; Springer Verlag. Bobertson, J. S. et al.. J. Acoust. Soc. Amer., 1987, 82: 559。

在下文中 k_{eff}^2 的下标"eff"和 q_c 的下标"c"均将被略去。

在 CNPE 法中，声场 $q(r,z)$ 是在 rz 平面上的栅格(见图 48)中来计算的。计算从 $r=0$ 以代表单极子源的起始函数 $q(0,z)$ 开始，将从 r 到 $r+\Delta r$ 的外推步幅写为

$$q(r,z)\to q(r+\Delta r,z)$$

因而栅格点 $r+\Delta r$ 处的 q 值就由 r 处的 q 值算出。仅当栅格的水平间隔 Δr 和铅直间隔 Δz 都不超过平均波长的十分之一时才能给出精确结果。栅格有一有限高度，在其顶部用一人工吸收层来消去从顶部的反射；地面效应则由一以复地面阻抗为参数的边界条件来计入。波数 k 对距离 r 的依赖关系分段来考虑，在一外推步幅中这种依赖关系可以忽略，从而 k 只是 z 的函数。

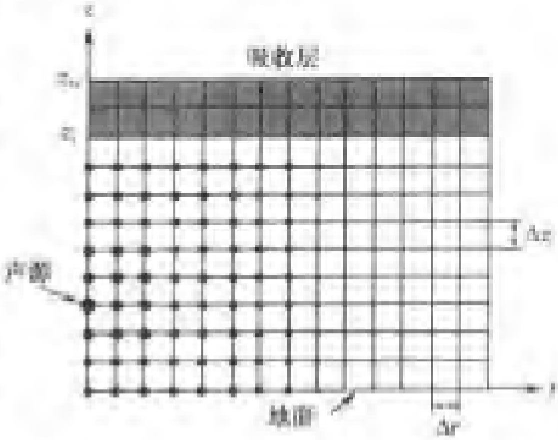


图 48 PE 法中所用 rz 平面上的栅格
栅格点上的声压振幅形象地用相应栅格点上圆圈的大小来表示。实际上沿 z 轴的栅格点数通常为 1000 或更多

将方程(7.41)的解写作

$$q(r,z)=\psi(r,z)\exp(ik_a r) \tag{7.42}$$

其中，k_a 为某一平均高度或就是地面处的波数。因子 $\exp(ik_a r)$ 表示在正 r 方向传播的波并作为 r 的函数而快速振荡；但函数 $\psi(r,z)$ 通常随 r 的变化很慢。将(7.42)式代入方程(7.41)给出

$$\partial_r^2\psi+2ik_a\partial_r\psi+\partial_z^2\psi+(k^2-k_a^2)^2\psi=0 \tag{7.43}$$

由于 $\psi(r,z)$ 通常随 r 的变化很慢，故左端第一项比起第二项来可以略去，这时得到的方程称为窄角抛物方程。

窄角抛物方程也可用另一方法来推导。令

$$k^2(z)-k_a^2=\delta k^2(z) \tag{7.44}$$

并引进算符

$$H_2(z)\equiv k^2(z)+\partial_z^2=k_a^2+\delta k^2(z)+\partial_z^2\equiv k_a^2(1+s) \tag{7.45}$$

可将方程(7.41)写为

$$\partial_r^2 q+H_2(z)q=[\partial_r-iH_1(z)][\partial_r+iH_1(z)]q=0 \tag{7.46}$$

这里

$$H_1(z)=k_a\sqrt{1+s} \tag{7.47}$$

为平方根算符。微分算符 $1+s$ 的平方根由展开式 $\sqrt{1+s}=1+\frac{1}{2}s-\frac{1}{8}s^2+\cdots$ 确定，类似于寻常平方根函数的展开[100]。

在导出方程(7.46)时，实际上已假定算符 H_1 和 ∂_r 是“对易”的，即有 $H_1\partial_r = \partial_r H_1$。严格地说，这仅对分层大气($k = k(z)$)是正确的，而对波数依赖于距离的大气($k = k(r, z)$)只是一种近似。

方程(7.46)中的因子 $[\partial_r - iH_1(z)]$ 表示在正 r 方向传播的波，而 $[\partial_r + iH_1(z)]$ 表示相反方向传播的波。在此我们选取声源位于 $r=0$ 处而接收器位于 $r>0$ 处，并只考虑在正 r 方向传播的波；不考虑后向散射。方程(7.46)即化为单向波动方程

$$\partial_r q - iH_1(z)q = 0 \tag{7.48}$$

如用下式来近似平方根算符(7.47)

$$H_1(z) = k_a\left(1 + \frac{1}{2}s\right) \tag{7.49}$$

就得到窄角抛物方程

$$\partial_r q - ik_a q - \frac{i}{2k_a}(\partial_z^2 + \delta k^2(z))q = 0 \tag{7.50}$$

如用(7.42)所定义的 ψ 来取代 q，就得到

$$\partial_r \psi = \frac{i}{2}k_a s\psi \tag{7.51}$$

与略去第一项后的方程(7.43)一致。

平方根算符的近似(7.49)仅对小于约 10°的仰角是精确的，更精确的展开式为[200]

$$H_1(z) = k_a\frac{1 + (3/4)s}{1 + (1/4)s} \tag{7.52}$$

这时单向波动方程(7.48)成为

$$\left(1 + \frac{1}{4}s\right)\partial_r q = ik_a\left(1 + \frac{3}{4}s\right)q \tag{7.53}$$

此即为广角抛物方程。对应于(7.42)式所定义的 ψ 的方程为

$$\left(1 + \frac{1}{4}s\right)\partial_r \psi = \frac{i}{2}k_a s\psi \tag{7.53'}$$

7.2.2　窄角 PE 和广角 PE 的有限差分解

以上导出的窄角 PE 和广角 PE 都可用以有限差分取代微商这种近似法来数值求解[202]。为求解窄角 PE，将去掉第一项的方程(7.43)写成

$$\partial_r \psi = \alpha\partial_z^2\psi + \beta\psi \tag{7.54}$$

其中 $\alpha = i/2k_a$ 而 $\beta = i(k^2 - k_a^2)/2k_a = i\delta k^2/2k_a$。采用图 48 所示栅格，其栅格点处于高度

$$z_j = j\Delta z, j = 1, 2, \cdots, M \tag{7.55}$$

将距离 r 处的场 ψ 记作基元为 $\psi_j=\psi(r,z_j)$ 的矢量 $\boldsymbol{\psi}$。利用中心差分公式

$$(\partial_z^2\psi)_{z_j}=\frac{\psi_{j+1}-2\psi_j+\psi_{j-1}}{(\Delta z)^2} \tag{7.56}$$

可将(7.54)式写成

$$\partial_r\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \vdots\\ \psi_{M-1}\\ \psi_M\end{bmatrix}=\left[\gamma\begin{bmatrix}-2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1\\ & & & & 1 & -2\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{bmatrix}\beta_1 & & & & & \\ & \beta_2 & & & & \\ & & \beta_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \beta_{M-1} & \\ & & & & & \beta_M\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \vdots\\ \psi_{M-1}\\ \psi_M\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}\psi_0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \psi_{M+1}\end{bmatrix} \tag{7.57}$$

其中 $\gamma=\alpha/(\Delta z)^2$ 而 $\beta_j=\beta(z_j)$;在右端的各矩阵中仅列出非 0 的矩阵元。矢量方程(7.57)表示一包含 M 个方程的方程组;每一方程将一矩阵元$\partial_r\psi_j$ 同矩阵元 ψ_{j-1},ψ_j 和 ψ_{j+1}联系起来。方程(7.57)右端最后一项包含地面 $z_0=0$ 处的场 ψ_0 和高度 $z_{M+1}=(M+1)\Delta z$ 处的场 ψ_{M+1}。

对于地面 $z_0=0$ 处的场 ψ_0 采用关系式

$$\psi_0=\sigma_1\psi_1+\sigma_2\psi_0 \tag{7.58}$$

其中系数 σ_1 和 σ_2 依赖于地面阻抗;而对于场 ψ_{M+1}采用关系式

$$\psi_{M+1}=\tau_1\psi_M+\tau_2\psi_{M-1} \tag{7.59}$$

于是可将(7.57)写为

$$\partial_r\boldsymbol{\psi}=(\gamma T+D)\boldsymbol{\psi} \tag{7.60}$$

其中 T 为三重对角矩阵而 D 为对角矩阵;它们分别由以下两式给出:

$$T=\begin{bmatrix}-2+\sigma_1 & 1+\sigma_2 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1\\ & & & & 1+\tau_2 & -2+\tau_1\end{bmatrix} \tag{7.61}$$

$$D = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & & \\ & \beta_2 & & & & \\ & & \beta_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \beta_{M-1} & \\ & & & & & \beta_M \end{pmatrix} \tag{7.62}$$

将(7.60)式从 r 积分到 $r+\Delta r$ 给出

$$\psi(r+\Delta r) - \psi(r) = (\gamma T + D)\int_r^{r+\Delta r} \psi \mathrm{d}r \tag{7.63}$$

我们将右端的积分近似地用被积函数的平均值与积分区间 Δr 的乘积 $\frac{1}{2}[\psi(r+\Delta r)+\psi(r)]\Delta r$ 来代替，这一近似被称为 Crank-Nicholson 近似。我们求得

$$M_2\psi(r+\Delta r) = M_1\psi(r) \tag{7.64}$$

其中 M_1 和 M_2 均为三重对角矩阵并由下二式给出

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 + \frac{1}{2}\Delta r(\gamma T + D) \\ M_2 &= 1 - \frac{1}{2}\Delta r(\gamma T + D) \end{aligned} \tag{7.65}$$

PE 的步进 $\psi(r)\rightarrow\psi(r+\Delta r)$ 即化为方程(7.64)(为一由有 M 个未知数 $\psi_j(r+\Delta r)$ 的 M 个方程组成的方程组)的解。由于 M_1 和 M_2 都是三重对角矩阵，故此解可用 Gauss 消去法有效地求出[203]。

广角 PE(7.53′)与窄角 PE(7.51)的差别在于左端的因子$(1+s/4)$。比较(7.51)式和(7.60)式表明算符 $ik_a s/2$ 的有限差分矩阵形式为 $\gamma T+D$。因此，广角 PE 中的因子$(1+s/4)$将使方程(7.63)左端出现因子$[1+(\gamma T+D)/(2ik_a)]$，这导致矩阵方程(7.64)中的两个矩阵 M_1 和 M_2 应被修正为

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 + \frac{1}{2}\Delta r(\gamma T + D) + \frac{\gamma T + D}{2ik_a} \\ M_2 &= 1 - \frac{1}{2}\Delta r(\gamma T + D) + \frac{\gamma T + D}{2ik_a} \end{aligned} \tag{7.66}$$

7.2.3　密度剖面的影响

上文已说过，方程(7.41)中$\partial_z^2 q$ 这一项是由 $k_{\mathrm{eff}}^2\partial_z(k_{\mathrm{eff}}^{-2}\partial_z q)$近似而来；如果不这么做，例如对于一无运动的等压大气，这一项就是 $\rho\partial_z(\rho^{-1}\partial_z q)$，这里 $\rho=\rho(z)$为大气的密度。这时方程(7.41)成为

$$\partial_r^2 q + \rho\partial_z(\rho^{-1}\partial_z q) + k^2 q = 0 \tag{7.67}$$

微分算符 $\rho\partial_z(\rho^{-1}\partial_z)$ 的有限差分形式由下式给出:

$$\rho\partial_z(\rho^{-1}\partial_z\psi)_{z_j} = \frac{1}{(\Delta z)^2}\times\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}\right)\psi_{j+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}+2+\frac{\rho_j}{\rho_{j-1}}\right)\psi_j + \frac{1}{2}\left(1+\frac{\rho_j}{\rho_{j-1}}\right)\psi_{j-1}\right] \tag{7.68}$$

以 $\rho\partial_z(\rho^{-1}\partial_z)$ 取代 ∂_z^2 的唯一效果是(7.65)和(7.66)中的矩阵 T 应被修改为

$$T = \begin{bmatrix} -2\gamma_{0,1} & \gamma_{1,1} & & & & \\ \gamma_{-1,2} & -2\gamma_{0,2} & \gamma_{1,2} & & & \\ & \gamma_{-1,3} & -2\gamma_{0,3} & \gamma_{1,3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_{-1,M-1} & -2\gamma_{0,M-1} & \gamma_{1,M-1} \\ & & & & \gamma_{-1,M} & -2\gamma_{0,M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{-1,1}\sigma_1 & \gamma_{-1,1}\sigma_2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \gamma_{1,M}\tau_2 & \gamma_{1,M}\tau_1 \end{bmatrix} \tag{7.69}$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_{1,j} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}\right) \\ \gamma_{0,j} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}+2+\frac{\rho_j}{\rho_{j-1}}\right) \\ \gamma_{-1,j} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\rho_j}{\rho_{j-1}}\right) \end{aligned} \tag{7.70}$$

数值计算表明:在方程(7.41)中将 $k_{\text{eff}}^2\partial_z(k_{\text{eff}}^{-2}\partial_z q)$ 这一项近似为 $\partial_z^2 q$ 所产生的影响是非常小的;大气梯度对声传播的影响几乎完全由方程(7.67)左端第三项决定。

7.2.4 有限元解

Gilbert 和 White 提出一种略为更精确一些的有限元近似解法[196];在其中可以采用铅直栅格的不均匀间距,也就是说 $z_j - z_{j-1}$ 可以随 j 而变。有限元解的基础是方程(7.67),所以解中就会包含密度梯度。

有限差分法最后导致形式如(7.64)式的三重对角矩阵;有限元法最后也导致同样形式的三重对角矩阵,我们将其写为

$$M^-\boldsymbol{\psi}(r+\Delta r) = M^+\boldsymbol{\psi}(r) \tag{7.71}$$

这里的三重对角矩阵 $M^{\pm}$ 由下式给出[196]

$$
M^{\pm}=\begin{bmatrix}
M^{\pm}_{0,1} & M^{\pm}_{1,1} & & & & \\
M^{\pm}_{-1,2} & M^{\pm}_{0,2} & M^{\pm}_{1,2} & & & \\
 & M^{\pm}_{-1,3} & M^{\pm}_{0,3} & M^{\pm}_{1,3} & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & M^{\pm}_{-1,M-1} & M^{\pm}_{0,M-1} & M^{\pm}_{1,M-1} \\
 & & & & M^{\pm}_{-1,M} & M^{\pm}_{0,M}
\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}
M^{\pm}_{-1,1}\sigma_1 & M^{\pm}_{-1,1}\sigma_2 & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & M^{\pm}_{1,M}\tau_2 & M^{\pm}_{1,M}\tau_1
\end{bmatrix}
\tag{7.72}
$$

其中的 $M^{\pm}_{m,j}$ 由下式给出

$$
M^{\pm}_{m,j}=\sum_{n=1}^{3}c^{\pm}_{n}H^{(n)}_{j,j+m} \tag{7.73}
$$

$m=-1,0,1$；$j=1,2,\cdots,M$；而各系数 $c^{\pm}_{n}$ 由下列各式给出：

$$
\begin{aligned}
c^{\pm}_{1}&=\frac{3}{4}\mp\frac{1}{4}\mathrm{i}k_a\Delta r\\
c^{\pm}_{2}&=\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\mathrm{i}k_a\Delta r\\
c^{\pm}_{3}&=c^{\pm}_{2}/k_a^2
\end{aligned}
\tag{7.74}
$$

量 $H^{(n)}_{j,j+m}$ 在 $n=1$，2 时为

$$
\begin{aligned}
H^{(n)}_{j,j}&=\frac{1}{12}[(z_j-z_{j-1})f_n(z_{j-1})+3(z_{j+1}-z_{j-1})f_n(z_j)+(z_{j+1}-z_j)f_n(z_{j+1})]\\
H^{(n)}_{j,j\pm1}&=\pm\frac{1}{12}[f_n(z_j)+f_n(z_{j\pm1})](z_{j+1}-z_j)
\end{aligned}
\tag{7.75a}
$$

在 $n=3$ 时为

$$
\begin{aligned}
H^{(3)}_{j,j\pm1}&=\pm\frac{1}{2}[f_1(z_j)+f_1(z_{j\pm1})]/(z_{j+1}-z_j)\\
H^{(3)}_{j,j}&=-[H^{(3)}_{j,j+1}+H^{(3)}_{j,j-1}]
\end{aligned}
\tag{7.75b}
$$

而 $f_1(z)=\rho^{-1}(z)$；$f_2(z)=\rho^{-1}(z)k^2(z)/k_a^2$。

7.3　抛物方程法 II：Green 函数抛物方程法(GFPE)

7.3.1　无界、无折射大气

本节所叙述的 GFPE 法仍基于轴对称近似，仍由方程(7.41)(其中仍略去 k 的下标"eff")出发。

为简明起见先考虑一无界、无折射大气,这时波数 k 为常数。对(7.41)式作 Fourier 变换 $z \to k_z$,即将其乘以 $\exp(-ik_z z)$再对 z 从 $-\infty$积分到$+\infty$,这给出

$$[\partial_r^2 + (k^2 - k_z^2)]Q = 0 \tag{7.76}$$

其中

$$Q(r,k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_z z) q(r,z) dz \tag{7.77}$$

为 q 的 Fourier 变换。现将方程(7.37)写为

$$(\partial_r - i\sqrt{k^2 - k_z^2})(\partial_r + i\sqrt{k^2 - k_z^2})Q = 0 \tag{7.78}$$

第一个因子给出解 $Q(r,k_z)=Q(0,k_z)\exp(ir\sqrt{k^2-k_z^2})$,这表示在$+r$ 方向上行进的波(当然应加上被我们略去的时间因子 $\exp(-i\omega t)$);而第二个因子给出解 $Q(r,k_z)=Q(0,k_z)\exp(-ir\sqrt{k^2-k_z^2})$,这表示在$-r$ 方向上行进的波。现只限于在$+r$ 方向上传播的波,故采用第一个解,此解也可写作

$$Q(r+\Delta r,k_z) = Q(r,k_z)\exp(i\Delta r\sqrt{k^2 - k_z^2}) \tag{7.79}$$

进行 Fourier 逆变换即得到函数 $q(r+\Delta r,k_z)$:

$$q(r+\Delta r,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_z z)\exp(i\Delta r\sqrt{k^2 - k_z^2})Q(r,k_z)dk_z \tag{7.80}$$

因此,利用前向和逆向 Fourier 变换即可将声场从 r 外推到 $r+\Delta r$。

适用于无界、无折射大气的方程(7.80)可被推广到一有限阻抗地面上空的折射大气情形[204],其基础是 Kirchhoff-Helmholtz 积分方程的二维变体。

在点 $\boldsymbol{r}_1=(x_1, y_1, z_1)$处一无源的三维体积 V(为表面 S 所包围)中,复声压振幅可用 Kirchhoff-Helmholtz 积分方程算出[93]

$$p(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi}\iint_S [g_3(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)\nabla p(\boldsymbol{r}) - p(\boldsymbol{r})\nabla g_3(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)]\cdot \boldsymbol{n}dS \tag{7.81}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$,$\nabla \equiv \partial = (\partial_x,\partial_y,\partial_z)$,$\boldsymbol{n}$ 为表面 S 上的外向单位法向矢,而三维 Green 函数 $g_3(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)$为下列非齐次 Helmholtz 方程的解

$$\nabla^2 g_3(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1) + k^2(\boldsymbol{r})g_3(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) \tag{7.82}$$

而 $p(\boldsymbol{r})$满足齐次 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 p(\boldsymbol{r}) + k^2(\boldsymbol{r})p(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{7.83}$$

在二维情形(7.81)化为

$$p(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi}\int_C [g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)\nabla p(\boldsymbol{r}) - p(\boldsymbol{r})\nabla g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)]\cdot \boldsymbol{n}ds \tag{7.84}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x, z)$,$\boldsymbol{r}_1=(x_1, z_1)$,$\nabla \equiv \partial = (\partial_x,\partial_z)$;积分遍及包围 S 的回路 C,而二维 Green 函数

$$g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} g_3(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)dy \tag{7.85}$$

满足非齐次 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)+k^2(\boldsymbol{r})g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) \tag{7.86}$$

现将(7.84)式的积分回路 C 选为如图 49 所示；C 由 $x=x_0$ 处之直线段 C_0 和圆心在 $\boldsymbol{r}_1$ 处、半径 $R\to\infty$ 的圆周 C_1 组成。由于 $R\to\infty$ 时 $p\to 0$ 从而 $g_2\to 0$，故 C_1 对回路积分的贡献趋于 0。对 Green 函数 g_2 的选择有相当大的自由度；唯一的条件是 g_2 必须满足方程(7.86)，所以 g_2 包含来自位于 $\boldsymbol{r}_1$ 处单极子声源的贡献。我们还可计入来自回路 C 所包围区域以外声源的贡献，这里我们将 g_2 选取成使在 C_0 上 $g_2=0$。为此可采用分别位于 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 处的两个相反单极子声源的场：

$$g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)=g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)-g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2) \tag{7.87}$$

其中 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)$ 和 $-g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2)$ 分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 处的两个相反单极子声源的场，它们分别是方程(7.86)和在(7.86)中以 $\boldsymbol{r}_2$ 取代 $\boldsymbol{r}_1$ 后所得方程的解。

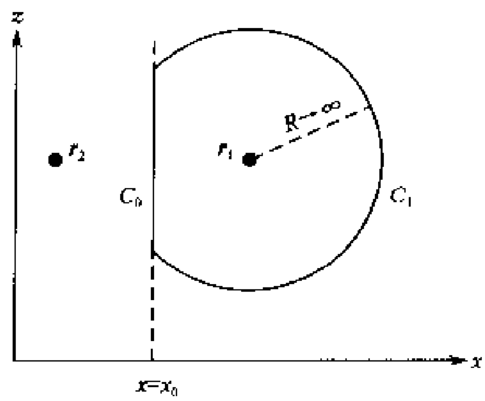


图 49　二维 Kirchhoff-Helmholtz 积分方程的几何图

由于在 C_0 上 $g_2=0$，故(7.84)式被积式中的第一项消失；而对于第二项，在 C_0 上我们有 $\nabla g_2\cdot\boldsymbol{n}=-\partial_x g_2=-2\partial_x g$，其中利用了(7.87)式。于是(7.84)式成为

$$p(\boldsymbol{r}_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(p(\boldsymbol{r})\partial_x g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1))_{x=x_0}\,\mathrm{d}z \tag{7.88}$$

此积分以 Rayleigh 积分著称(参阅文献[39]Sec. 278，文献[60,205])。

再回到变量 q，并设 $z=0$ 处为地面，考虑到地面的影响，(7.88)式中的积分下限可改为 $z=0$ 而地面的反射效应可用 Green 函数中的项来表现，于是(7.88)式就成为

$$q(r_1,z_1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}[q(r,z)\partial_r g(r,z;r_1,z_1)]_{r=r_0}\,\mathrm{d}z \tag{7.89}$$

Green 函数 $g(r,z;r_1,z_1)$ 即为由 (r_1,z_1) 处的单极子声源在 (r,z) 处造成的声场，它满足下列方程

$$[\partial_r^2+\partial_z^2+k^2(z)]g(r,z;r_1,z_1)=-4\pi\delta(r-r_1)\delta(z-z_1) \tag{7.90}$$

波数 k 仅为 z 的函数，其对 r 的依赖关系可用 k 在 r“步增”之间的变化来计及，从而 Green 函数仅通过差值 $\Delta r=r_1-r$ 依赖于 r 和 r_1，故可将其表为 $g(\Delta r;z,z_1)$。引进 Fourier 变换

$$G(\kappa,z,z_1)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\Delta r,z,z_1)\exp(-\mathrm{i}k_h\Delta r)\,\mathrm{d}(\Delta r)$$

其中 k_h 为水平波数。将上式的逆 Fourier 变换代入(7.89)式即给出(以 $\partial_r=-\partial_{\Delta r}$，并将 z_1 记作 z，z 记作 z')

$$q(r+\Delta r,z)=\frac{1}{4\pi^2 \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}k_h\Delta r)k_h\mathrm{d}k_h\int_0^{\infty}G(k_h,z',z)q(r,z')\mathrm{d}z' \tag{7.91}$$

Green 函数 $G(\kappa,z',z)$为(7.51)式经 Fourier 变换后的方程的解,将(7.90)式乘以 $\exp(-\mathrm{i}k_h\Delta r)$并对 Δr 积分即可得到所要的方程:

$$[\partial_z^2+k^2(z)-k_h^2]G(k_h,z',z)=-4\pi\delta(z-z') \tag{7.92}$$

从方程(7.91)和(7.92)即可推出 GFPE 法的基本方程。

对于一无折射大气,波数 $k(z)=k_0=\text{const.}$,在这种情况下,如 $z=0$ 处为有限阻抗地面,则方程(7.92)的解为[177,Sec.D.4]

$$G(k_h,z',z)=\frac{2\pi\mathrm{i}}{k_v}\{\exp(\mathrm{i}k_v|z-z'|)+R(k_v)\exp(\mathrm{i}k_v[z+z'])\} \tag{7.93}$$

其中 k_v 为铅直波数

$$k_v^2=k^2(z)-k_h^2$$

而

$$R(k_v)=\frac{k_vZ-k_0}{k_vZ+k_0}$$

为平面波的反射系数;Z 为局部反应地面的法化阻抗。将(7.93)式代入(7.91)式就给出

$$q(r+\Delta r,z)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}k_h\Delta r)k_h\mathrm{d}k_h$$
$$\times\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{i}}{2k_v}\{\exp(\mathrm{i}k_v|z-z'|)+R(k_v)\exp(\mathrm{i}k_v[z+z'])\}q(r,z')\mathrm{d}z' \tag{7.94}$$

适当选取积分路径并应用留数定理,最后可求得

$$q(r+\Delta r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}\Delta r\sqrt{k_0^2-k_z^2})\exp(\mathrm{i}k_zz)\mathrm{d}k_z\int_0^{\infty}\exp(-\mathrm{i}k_zz')q(r,z')\mathrm{d}z'$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(k_z)\exp(\mathrm{i}\Delta r\sqrt{k_0^2-k_z^2})\exp(\mathrm{i}k_zz)\mathrm{d}k_z\int_0^{\infty}\exp(\mathrm{i}k_zz')$$
$$\times q(r,z')\mathrm{d}z'+2\mathrm{i}k_z\exp(-\mathrm{i}k_zz)\exp(\mathrm{i}\Delta r\sqrt{k_0^2-k_z^2})$$
$$\times\int_0^{\infty}\exp(-\mathrm{i}k_zz')q(r,z')\mathrm{d}z' \tag{7.95}$$

上式右端三项分别表示三种不同的声波:第一项表示直达波,第二项表示由地面反射的波,第三项表示所谓的表面波。如不存在地面,则第二项和第三项都消失,而(7.96)式(这时积分下限 $z'=0$ 应换为 $z'=-\infty$)就回到(7.80)式。

7.3.2 折射大气

对于折射大气,方程(7.41)中的波数 k 随高度 z 而变,将该方程写为

$$\partial_r^2q(r,z)=-H_2(z)q(r,z) \tag{7.96}$$

其中算符 $H_2(z)$定义为

$$H_2(z) = k^2(z) + \partial^2_z \tag{7.97}$$

对于在正 r 方向传播的波，相应的单向波动方程是

$$\partial_r q(r,z) = \mathrm{i}H_1(z)q(r,z) \tag{7.98}$$

这里平方根算符 $H_1 = \sqrt{H_2}$，将 $k^2(z)$写为

$$k^2(z) = k_a^2 + \delta k^2(z) \tag{7.99}$$

其中 k_a 为一常数波数，可取在某一平均高度的波数值或地面上的波数值 $k_0 = k(0)$。(7.97)式即成为

$$H_2(z) = H_{2a} + \delta k^2(z)$$

其中 $H_{2a} = k_a^2 + \partial_z^2$，而平方根算符可被近似为

$$H_1(z) = \sqrt{H_{2a} + \delta k^2(z)} \approx H_{1a} + \frac{\delta k^2(z)}{2k_a}$$

其中 $H_{1a}^2 = H_{2a} \approx k_a^2$，将此代入(7.48)即给出

$$\partial_r q(r,z) = \mathrm{i}H_{1a}q(r,z) + \mathrm{i}\,\frac{\delta k^2(z)}{2k_a}q(r,z) \tag{7.100}$$

上式右端第一项表示波数为常数 k_a 的无折射大气中的传播；面第二项显示出大气的折射效应。

将方程(7.100)从 r 积分到 $r+\Delta r$，得到

$$q(r+\Delta r,z) = \exp\left(\mathrm{i}\Delta r\frac{\delta k^2(z)}{2k_a}\right)\exp(\mathrm{i}H_{1a}\Delta r)q(r,z) \tag{7.101}$$

因子 $\exp(\mathrm{i}H_{1a}\Delta r)q(r,z)$为方程(7.100)对无折射大气解的一种形式上的表示。在上一小节中已看到对于无折射大气的解由(7.96)式给出，从(7.101)式则看出大气的折射可用在完成一系列外推后将解乘以一相位因子来计人。

为了提高数值计算的精度，我们用 $\psi = \exp(-\mathrm{i}k_a r)q(r,z)$来取代 $q(r,z)$。计人(7.101)式中所包含的折射因子，(7.96)式即成为

$$\begin{aligned}\psi(r+\Delta r,z) = \exp\left(\mathrm{i}\Delta r\frac{\delta k^2(z)}{2k_a}\right)\Bigg[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}&[\Psi(r,k_z) + R(k_z)\Psi(r_2 - k_z)]\\ &\times\exp(\mathrm{i}\Delta r[\sqrt{k_a^2 - k_z^2} - k_a])\exp(\mathrm{i}k_z z)\mathrm{d}k_z\\ &+ 2\mathrm{i}k_z\Psi(r,k_z)\exp(\mathrm{i}\Delta r[\sqrt{k_a^2 - k_z^2} - k_a])\exp(\mathrm{i}k_z z)\Bigg]\end{aligned} \tag{7.102}$$

其中

$$\Psi(r,k_z) = \int_0^{\infty}\exp(-\mathrm{i}k_z z')\psi(r,z')\mathrm{d}z' \tag{7.103}$$

为 $\psi(r,z)$的空间 Fourier 变换。方程(7.102)和(7.103)即为 GFPE 法的基本方程，除上述这种用 Kirchhoff-Helmholtz 积分方程的推导外，它们也可用泛函分析

的谱定理来导出[206]。

7.3.3 三维 GFPE 法

我们来计算如图 50 所示的饼状切片区域内一点声源的声场，切片二侧面 $\phi=0$ 和 $\phi=\delta$ 上加有周期性边界条件。为保持计算有效，将 δ 值选得很小。如在二维 GFPE 法中那样，我们在地面 $z=0$ 上采用阻抗条件而在切片顶端采用一吸收层。

计算基本上是正 r 方向上外推步进的重复。在一次外推步进中，$r+\Delta r$ 处曲面上的场是由 r 处曲面上的场计算出来的。可以证明，三维 GFPE 法[192]中一次外推步进要求估算一前向二维快速 Fourier 变换(FFT)和一逆向二维快速 Fourier 变换；而二维 GFPE 法中一次外推步进则要求估算一前向一维 FFT 和一逆向一维 FFT。

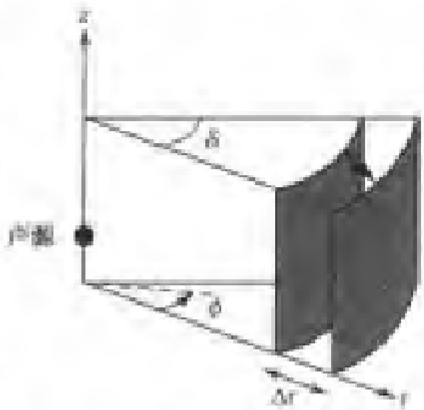


图 50 三维 GFPE 中所用的饼状切片区域

我们从下列柱坐标系 $r\phi z$ 中的远场 Helmholtz 方程出发：

$$(\partial_r^2+r^{-2}\partial_\phi^2+\partial_z^2+k^2)q=0 \tag{7.104}$$

此方程与二维 GFPE 法的出发方程(7.41)的差别在于其第二项的存在。

在远场近似下，我们略去饼状切片曲面的曲率，从而可以采用一维 Rayleigh 积分(7.88)在直坐标下的二维类比

$$p(\boldsymbol{r}_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int(p(\boldsymbol{r})\partial_x g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1))_{x=x_0}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{7.105}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 而 $\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$；Green 函数 g 满足 Helmholtz 方程：

$$(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2+k^2)g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)=-4\pi\delta(x-x_1)\delta(y-y_1)\delta(z-z_1) \tag{7.106}$$

将上文在二维 GFPE 法中导出(7.91)的步骤推广到三维情形，就给出

$$q(r+\Delta r,z)=\frac{1}{4\pi^2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}k_\mathrm{h}\Delta r)k_\mathrm{h}\mathrm{d}k_\mathrm{h}\int_0^{\delta}r\mathrm{d}\phi'\int_0^{\infty}\mathrm{d}z'G(k_\mathrm{h},\phi',\phi,z',z)q(r,\phi',z') \tag{7.107}$$

其中 Green 函数 G 满足方程：

$$[r^{-2}\partial_\phi^2+\partial_z^2+k^2(z)-k_\mathrm{h}^2]G(k_\mathrm{h},\phi',\phi,z',z)=-4\pi\delta(r\phi-r\phi')\delta(z-z') \tag{7.108}$$

方程(7.107)、(7.108)即对应于二维 GFPE 法中的方程(7.91)、(7.92)，它们同样也可用泛函分析的谱定理导出。

同在上文中讨论二维 GFPE 法时一样，也先考虑无折射情形，这时(7.108)式

中的波数 k 为常数，故 Green 函数 $G(k_h,\phi',\phi,z',z)$ 仅通过差值 $\phi-\phi'$ 依赖于 ϕ 和 ϕ'。应用 Fourier 变换 $r\phi-r\phi'\to k_{r\phi}$，故有

$$G(k_h,\phi',\phi,z',z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}k_{r\phi}[r\phi-r\phi'])G_\phi(k_h,k_{r\phi},z',z)\mathrm{d}k_{r\phi} \tag{7.109}$$

其中 G_ϕ 为 G 的 Fourier 变换。将下列关系式

$$\delta(r\phi-r\phi')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}k_{r\phi}[r\phi-r\phi'])\mathrm{d}k_{r\phi} \tag{7.110}$$

和(7.109)式代入(7.108)式给出

$$\partial_z^2G_\phi+(k^2-k_h^2-k_{r\phi}^2)G_\phi=-4\pi\delta(z-z') \tag{7.111}$$

上方程的解即由(7. 93)给出，只是其中的铅直波数 k_v 改由下式给出：

$$k_v^2=k^2-k_h^2-k_{r\phi}^2 \tag{7.112}$$

采用二维情形下的类似步骤，可以求得相当于(7.95)式的结果

$$\begin{aligned}q(r+\Delta r,\phi,z)=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}k_\phi\phi)\mathrm{d}k_\phi\times\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}k_zz)\mathrm{d}k_z\\&\times\exp(\mathrm{i}\Delta r\sqrt{k_0^2-k_z^2-k_\phi^2/r^2})\int_0^\delta\exp(-\mathrm{i}k_\phi\phi')\mathrm{d}\phi'\int_0^\infty\exp(-\mathrm{i}k_zz')\\&\times q(r,\phi',z')\mathrm{d}z'+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(k_z)\exp(\mathrm{i}k_zz)\mathrm{d}k_z\\&\times\exp(\mathrm{i}\Delta r\sqrt{k_0^2-k_z^2-k_\phi^2/r^2})\int_0^\delta\exp(-\mathrm{i}k_\phi\phi')\mathrm{d}\phi'\int_0^\infty\exp(\mathrm{i}k_zz')\\&\times q(r,\phi',z')\mathrm{d}z'+2\mathrm{i}k_z\exp(-\mathrm{i}k_zz)\exp(\mathrm{i}\Delta r\sqrt{k_0^2-k_z^2-k_\phi^2/r^2})\\&\times\int_0^\delta\exp(-\mathrm{i}k_\phi\phi')\mathrm{d}\phi'\int_0^\infty\exp(-\mathrm{i}k_zz')q(r,\phi',z')\mathrm{d}z'\Big\}\end{aligned} \tag{7.113}$$

其中 $k_\phi\equiv k_{r\phi}r$。

对于折射大气，也可用完全类似的步骤得到相当于(7.102)式的结果：

$$\begin{aligned}\phi(r+\Delta r,\phi,z)=&\exp(\mathrm{i}\Delta r\delta k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}k_\phi\phi)\mathrm{d}k_\phi\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}k_zz)\mathrm{d}k_z\\&\times[\Psi(r,k_\phi,k_z)+R(k_z)\Psi(r,k_\phi,-k_z)]\\&\times\exp(\mathrm{i}\Delta r[\sqrt{k_a^2-k_z^2-k_\phi^2/r^2}-k_a])+2\mathrm{i}k_z\exp(-\mathrm{i}k_zz)\\&\times\Psi(r,k_\phi,k_z)\exp(\mathrm{i}\Delta r[\sqrt{k_a^2-k_z^2-k_\phi^2/r^2}-k_a])\Big\}\end{aligned} \tag{7.114}$$

其中

$$\Psi(r,k_\phi,k_z)=\int_0^\delta\exp(-\mathrm{i}k_\phi\phi')\mathrm{d}\phi'\int_0^\infty\exp(-\mathrm{i}k_zz')\psi(r,\phi',z')\mathrm{d}z' \tag{7.115}$$

为 $\psi(r,\phi,z)$ 的二维 Fourier 变换。方程(7.114)和(7.115)即为三维 GFPE 法的基本方程。在轴对称情形下，k 和 ψ 均与 ϕ 无关，而方程(7.114)和(7.115)就都分别

与二维 GFPE 法中的(7.92)式和(7.93)式一致，只是其中的折射因子 $\exp\left(\mathrm{i}\Delta r\frac{\delta k^2(z)}{2k_a}\right)$为 $\exp(\mathrm{i}\Delta r\delta k)$所取代；而在方程(7.115)中要用到关系式 $2\pi\delta(k_\phi)=\int_0^\delta\exp(-\mathrm{i}k_\phi\phi')\mathrm{d}\phi'$。

总的说来，PE 法是研究大气声传播的有力工具，它保留了 Helmholtz 方程的全波效应，因此有能力预报在折射和衍射时的声场。特别是，它适用于任意的声速剖面和局部反应地面。现有的 PE 法看来对向下折射的情况给出的计算结果最精确，对于轻微向上折射的情况则在较短距离范围内给出精确结果；对向上折射的长距离范围结果的精度最差。PE 法的优越性还表现在处理各种复杂效应(诸如湍流和不规则地形等)的潜力上。

7.4 射线寻迹

本章开头时已指出，射线寻迹是一种重要的基本算法，它在大气声学中更有其特殊重要性，从而也是此领域内应用最早的数值计算方法。

前述的两种方法都是以波动方程(Helmholtz 方程)为基础的，而射线寻迹则从几何声学观点出发。现以作者本人的一项关于运动介质中的处理[207]来阐明射线寻迹的基本概念，并以此来补充第 2 章第 2.6.2 节和第 3 章中有关运动介质几何声学的讨论。

7.4.1 射线方程

不考虑湍流和黏性，但计及运动和重力，描述大气声扰动的基本方程组(3.35)(但在第一式(Euler 方程)中还须补充以重力加速度 $-\boldsymbol{g}$ 一项)在直坐标系下按分量写出(不包括第三式)即为

$$
\begin{aligned}
&D_t^0 v_{1x}+\frac{1}{\rho_0}\partial_x p_1=0\\
&D_t^0 v_{1y}+\frac{1}{\rho_0}\partial_y p_1=0\\
&D_t^0 v_{1z}+\frac{1}{\rho_0}\partial_z p_1+\frac{g}{\rho_0}\rho_1=0\\
&D_t^0\rho_1+\rho'_0 v_{1z}+\rho_0\,\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1=0\\
&D_t^0 p_1+p'_0 v_{1z}=c^2(D_t^0\rho_1+\rho'_0 v_{1z})
\end{aligned}
\tag{7.116}
$$

其中，下标 0 表示未受扰动的量，下标 1 表示微扰量，算符 $D_t^0=\partial_t+\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla$；撇号表示对宗量 z 的微商；假定 g、c 和 $v_0(\ll c)$在所讨论的大气某区域内局部地均为常数。

从方程组(7.116)最后两式中消去 ρ_1 并利用流体静力学方程(1.13)即得

$$D_t^0 p_1 + \rho_0 g v_{1z} + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0 \tag{7.117}$$

再从方程组(7.116)第三、五两式中消去 ρ_1，得到

$$(D_t^0 + \omega_B^2) v_{1z} + \frac{1}{\rho_0} D_t^0 \left(\partial_z + \frac{g}{c^2}\right) p_1 = 0 \tag{7.118}$$

其中 ω_B 为(1.28)式所定义的 V-B 频率。

为了消去对 $\rho_0(z)$ 的依赖关系，可仿照 Eckart 引进下列“场变量”[208]①：

$$\boldsymbol{V} \equiv \left(\frac{\rho_0}{\rho_R}\right)^{1/2} \boldsymbol{v}_1, P \equiv \left(\frac{\rho_0}{\rho_R}\right)^{-1/2} p_1 \tag{7.119}$$

其中 ρ_R 为某参考水平面(通常即可取为地平面)上的密度。这时基本方程组(7.116)中第一、二式以及(7.117)式、(7.118)式就变换为

$$\left.\begin{aligned} & D_t^0 V_x + \frac{1}{\rho_R}\partial_x P = 0 \\ & D_t^0 V_y + \frac{1}{\rho_R}\partial_y P = 0 \\ & \frac{1}{c^2 \rho_R} D_t^0 P + \partial_x V_x + \partial_y V_y + (\partial_z - \Gamma) V_z = 0 \\ & (D_t^{02} + \omega_B^2) V_z + \frac{1}{\rho_R} D_t^0 (\partial_z + \Gamma) P = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.120}$$

其中 Γ 为 Eckart 系数[161]

$$\Gamma \equiv \frac{\rho_0'}{2\rho_0} + \frac{g}{c^2} = \frac{1}{c}\left[\frac{g}{2c}(2-\gamma) - c'\right] \tag{7.121}$$

在变为第二形式时利用了理想气体状态方程(1.7)和绝热声速关系式(1.17)。根据我们的假设，以及因为 $\rho_0(z)$ 为 z 的指数函数((1.15)式)，所以现在方程组(7.120)中各个系数均局部地为常数，从而可设其平面波解具有形式：

$$P、\boldsymbol{V} \propto \exp\{\mathrm{i}\tau(\boldsymbol{r}, t)\} \equiv \exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\} \tag{7.122}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 为波矢、$\boldsymbol{r}$ 为矢径而 τ 为(2.82)式所定义的程函，而有

$$\boldsymbol{k} = \nabla\tau, \omega = -\partial_t \tau \tag{7.123}$$

以(7.122)式代入(7.120)式即得

① 与 Eckart 的定义略有不同的是：在这里用 $(\rho_0/\rho_R)^{1/2}$ 代替了 $(\rho_0 c_s)^{1/2}$，这样做的目的是为了保持量纲的统一和基本场变量近似量值的一致。

$$\left.\begin{aligned}&\rho_R\omega^*V_x-k_xP=0\\&\rho_R\omega^*V_y-k_yP=0\\&k_xV_x+k_yV_y+(k_z+\mathrm{i}\Gamma)V_z-\frac{\omega^*}{c^2\rho_R}P=0\\&(\omega_B^2-\omega^{*2})V_z+\frac{\omega^*}{\rho_R}(k_z-\mathrm{i}\Gamma)P=0\end{aligned}\right\}\tag{7.124}$$

其中

$$\omega^*\equiv\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_0\tag{7.125}$$

就是我们在第3章第3.5.2节中讨论过的“禀性频率”，或即在附着于运动流体上的坐标系中所观察到的波频率。

像我们在第6章第6.1.1节中所做过的那样，令方程组(7.124)的特征行列式等于0，即得到局部频散方程：

$$H(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{k},\omega)\equiv K^2(\omega_B^2-\omega^{*2})+\omega^{*2}(k_z^2+\Gamma^2)=0\tag{7.126}$$

其中

$$K^2\equiv\frac{\omega^{*2}}{c^2}-k_x^2-k_y^2\tag{7.127}$$

如上所述，严格地说，(7.126)式仅当微分方程组(7.124)中诸系数均为常数的情形下才成立，只要风速$\boldsymbol{v}_0$的空间微商比ω^*小得多，而时间微商比g小得多，这些要求实际上即相当于要求传播介质的性质在一波长范围内变化很小的WKB近似(参阅第2章第2.4节)。正是在这一近似下，才可假设(7.119)式中各个场变量具有如(7.122)式所示形式，而(7.123)式中的$\boldsymbol{k}$和ω均为时间和空间的缓变函数从而它们的微商均可略去。在这一近似下，类比于分析力学中的Hamilton-Jacobi方程，三维射线的程函方程可推导如下[30]。

用下述定义引进新变量ν:

$$\mathrm{d}_t=\mathrm{d}_\nu\mathrm{d}_t\nu\tag{7.128}$$

下述方程组

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}_\nu\boldsymbol{r}=\partial_k H,\ \mathrm{d}_\nu t=-\partial_\omega H\\&\mathrm{d}_\nu\boldsymbol{k}=-\partial_r H,\ \mathrm{d}_\nu\omega=\partial_t H\end{aligned}\tag{7.129}$$

描述出八维空间$(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{k},\omega)$中一点的运动，使得如在$\tau$的某初始值下$H=0$，则对$\tau$的所有值$H$均为0。随着$\boldsymbol{k}$和$\omega$的变化，这些方程就描绘出射线上一点或一波包在物理空间中的运动。

将由(7.123)式、(7.128)式和(7.129)式得到的关系

$$\mathrm{d}_t\boldsymbol{r}=\partial_k H/(-\partial_\omega H)$$

应用到频散方程(7.126)并考虑到(7.125)式,同时令 $v_{0z}=0$ 即只考虑水平风情形,就得到射线的参数方程:

$$\left.\begin{aligned} d_t x &= \frac{c^2(\omega_B^2-\omega^{*2})k_x}{\omega^*\Phi^2}+v_{0x} \\ d_t x &= \frac{c^2(\omega_B^2-\omega^{*2})k_y}{\omega^*\Phi^2}+v_{0y} \\ d_t z &= -\frac{c^2\omega^* k_z}{\Phi^2} \end{aligned}\right\} \tag{7.130}$$

其中

$$\Phi^2 \equiv \omega_B^2+c^2\Gamma^2+c^2k^2-2\omega^{*2}=\left(\frac{\gamma g}{2c}+c'\right)^2+c^2k^2-2\omega^{*2} \tag{7.131}$$

$$k^2 \equiv k_x^2+k_y^2+k_z^2 \tag{7.132}$$

在方程组(7.130)诸方程中消去参数 t 后即得出直角坐标下的声线微分方程①:

$$\left.\begin{aligned} d_z x &= \frac{c^2(\omega^{*2}-\omega_B^2)k_x-\omega^*\Phi^2 v_{0x}}{c^2\omega^{*2}k_z} \\ d_z y &= \frac{c^2(\omega^{*2}-\omega_B^2)k_y-\omega^*\Phi^2 v_{0y}}{c^2\omega^{*2}k_z} \end{aligned}\right\} \tag{7.133}$$

用完全类似的步骤可求出波矢 $\boldsymbol{k}$ 的时间变化率

$$d_t\boldsymbol{k} = \partial_r H/\partial_\omega H,$$

在分层大气假定下(v_{0x}、v_{0y}和 c 均只是高度 z 的函数),经过相当繁赘的运算并利用方程组(7.130)中第三式消去 dt 后即得出 $\boldsymbol{k}$ 随 z 的变化率:

$$\begin{aligned} d_z k_x &= 0 \\ d_z k_y &= 0 \\ d_z k_z &= \frac{1}{c^2\omega^{*2}k_z}\Big\{\omega^*\Phi^2(k_x v'_{0x}+k_y v'_{0y})+\frac{c'}{c}[\omega^{*2}(\omega_B^2-\omega^{*2})+(\gamma-1)g^2k^2 \\ &\quad +(2-\gamma)g\omega^{*2}\Gamma]+[(c')^2-cc''](gk^2-\omega^{*2}\Gamma)\Big\} \end{aligned} \tag{7.134}$$

第一、二式表明 $\boldsymbol{k}$ 的 x 分量和 y 分量不随高度变化,这是分层大气的必然结果。

将实际大气中 c 和 v 对 z 的依赖关系(大气剖面)应用到方程组(7.133)和(7.134)以进行数值积分,便可得出具体的声线路径。

---

① 在文献[209]中曾用类似方法得到球坐标系下的射线方程。作者后来又在同时计入重力以及介质的运动和吸收这一最普遍情形下导出极为复杂的相应的射线方程。参见:Yang Xunren (H. J. Yang). Ray theory for an absorbing atmosphere, Proc. 3rd International Meeting on Low Frequency Noise and Vibration, London, 1985; 或见 J. Low Frequency Noise and Vibration, 1986, 5(2): 78~85 。

7.4.2 数值积分的具体例子——台风次声射线寻迹

我们以台风次声为例来应用上述理论。台风(或风暴)所造成的海浪是一种重要的自然次声源(参阅第10章),其周期约在3~8s之间,所采取的大气剖面如图51(a)所示,基本上取自美国"标准大气"[210],但1.7km以下数据按观测台风时(1978年7月下旬的六号台风"Wendy")的现场(西太平洋至福建沿海)平均气象资料作了修正。因主要是东风,故将正x轴方向取作正西而将v_{0y}取作0。$c(z)$和$v_{0x}(z)$的连续函数按步长2.5km分为若干均匀层(每层中的c和v_{0x}分别为常数),然后采用四阶Runge-Kutta法在微型计算机TRS-80上对(7.134)式和(7.133)式进行数值积分(对z的积分步长为100m)。因$v_{0y}=0$并有$d_z k_x=d_z k_y=0$,所以现在的声线是在xz平面内的平面曲线,从面可只用k与正x轴所成角度χ来描述声线方向;$k_x\left(=\frac{\omega}{c_0}\cos\chi_0\right)$、$k_y(=0)$均为常数而$k_z$的初始值为$k_{z0}=\frac{\omega}{c_0}\sin\chi_0$。台风次声频率按0.2Hz计算。按(7.134)式积分求出k_z值随高度z的变化后再以之代入(7.133)式,算出对应于不同χ_0值的各条声线。在计算程序中,应考虑到声线过转折点$d_z x=0$后,z值即应递减($dz<0$),自此k_z开始取负值,以与声线的向下弯曲相对应,当声线继续向下碰到海面或地面时发生反射(反射角=初始出射角χ_0),而又向上继续传播,如此周而复始,循环下去。

最后得到的声线图如图51(b)所示(为简明起见,反射后的声线未画出)。可以看出各条声线具有明显对称性,即"上行"部分与"下行"部分形状基本一致(细微差别主要是由于计算声线转折点时所取步长还不够细密所致),这自是意料之中的。若将v_{0x}的剖面叠加到c的剖面上(图51(a)中虚线),即为"等效声速"剖面。可以看出在顺风情形下实际存在着三个声道,其声道轴分别位于高度0(落地波导)、约25km(第一声道)和约85km(第二声道)处,声线也相应地明显分为三族:第一族(对应于$\chi_0\leqslant16°$完全受落地波导控制;第二族(对应于$16°<\chi_0\leqslant33°$)和第三族(对应于$\chi_0>33°$)则分别主要受第一、第二声道影响。逆风情形($90°<\chi_0\leqslant180°$)也进行了计算,由于这一结果只对台风中心以东的观测站有实际意义,所以未给出相应的声线图。但应指出:这时的有效声速剖面(图51(a)中的点线)与顺风时(虚线)有很大不同,首先是只存在两个声道,落地波导消失,面第一声道位置下移;其次,有效声速随z的变化多少被"拉平"(由于声速部分地被风速"抵消"),极小值与极大值的差别减小,以致声道的作用也相对减弱了。这些因素使声线图发生显著变化,主要是各临界χ_0值变小,并且对于同一χ_0,相应的声线"跨度"(同一声线在两次相继反射之间所通过的水平距离)变大。

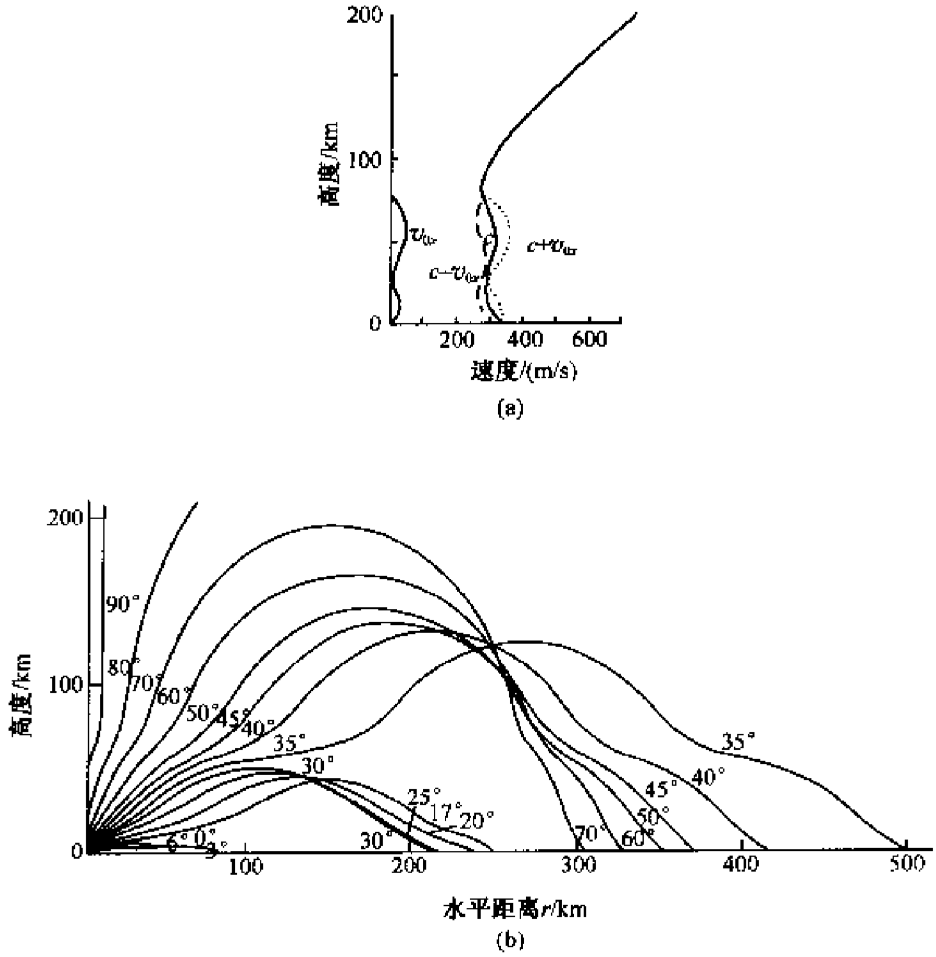


图 51　台风次声射线寻迹

(a) 计算声线所用的大气剖面(c:声速;v_{0x}:x 方向(西)风速);(b) 按图(a)所示大气剖面计算得出的声线图(曲线上标出的角度为所对应的初始出射角 χ_0)

7.5　Gauss 射线束法(GB①)

Gauss 射线束叠加法可说是近二十年发展起来的一种修正的射线寻迹法。最初大约是 20 世纪 80 年代初由 Cervenpy 等人在地震学中引进的[211],后来相继应用到其他领域,如水声学[212]和电磁波传播等,这种方法最初是对一维或二维不均匀介质情形求解,后来才推广到三维情形[213]。

理论的基本概念是,从声源发射出一扇形射线束,再对这些射线束通过介质的传播进行寻迹,在每根射线的紧接邻域内求解波动方程,最后将各射线束的贡献叠

① 将"Gaussian Beam"略作"GB"是作者的一种"杜撰",这是为了与已被普遍采用的"FFP"(Fast Field Program)和"PE"(Parabolic Equation)相呼应。

加起来即得到接收器处的声压。GB 法受限于射线寻迹所固有的高频局限性。理论假定介质性质在一波长范围内变化很慢,以致不均匀性之间的相互作用可以忽略,并且波动方程可用抛物方程来近似。

较详细地说,GB 法可分为如下三个步骤:首先,声线从声源发射出来,其通过介质的传播由数值求解射线方程所描述;其次,在其中心沿着每条射线的坐标系中用抛物近似求解波动方程。这导致一个一阶微分方程组,它可沿每条射线用逐步法求解,波动方程的解以 GB 的形式表示出;第三步,将在接收器处交汇的所有射线束叠加起来就得到最后的解。

GB 法克服了常规射线法的传统困难:它的解处处都是单值的,从而消除了焦散线上的奇点和进入影区的急剧过渡。这种方法对介质的确切细节并不敏感,因为与射线法相反,GB 法提供的是局部平均,没有必要去寻求准确交汇到接收器上的射线,从而缩短了计算时间。

现在基本上按照文献[211]、[214]和[215],以二维情形简述 GB 法的基本计算步骤。

第一步是解出经典射线方程以得出射线束的中心射线,这些方程是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_t \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{k}}{k} c \\ \mathrm{d}_t \boldsymbol{k} &= -k \nabla c - \sum k_i \nabla v \end{aligned} \tag{7.135}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为风速矢,$\boldsymbol{k}$ 为波矢。上述方程组通常是用标准的数值技术求解的。当声速剖面是线性函数或可被分解成按线性变化的层时,也可解析地求解(参阅第 2 章)。

第二步是用抛物近似在以射线为中心的坐标系中局部求解波动方程。以射线为中心的坐标系为一跟踪一特定射线的正交曲线坐标系。在二维介质中,该坐标系由(x,z)平面内射线的切向单位矢 $\boldsymbol{t}$ 和法向单位矢 $\boldsymbol{n}$ 确定(图 52)。

将 Helmholtz 方程的解写为如下形式:

$$u(s,n,\omega) = \left[\frac{c(0)q(0)}{c(s)q(s)}\right]^{1/2} \exp\left[-\mathrm{i}\omega\left\{\tau(s) + \frac{1}{2}M(s)n^2\right\}\right] \tag{7.136}$$

其中 s 为沿中心射线从声源量起的距离,n 表示 s 处垂直于射线方向上的长度,$c(s)$为声速而 $\tau(s)$为沿中心射线的行进时间;函数 $M(s)$定义为

$$M(s) = p(s)/q(s) \tag{7.137}$$

其中

$$\begin{aligned} p(s) &= \varepsilon p_1(s) + p_2(s) \\ q(s) &= \varepsilon q_1(s) + q_2(s) \end{aligned} \tag{7.138}$$

而

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_2, \varepsilon_2 \geqslant 0 \tag{7.139}$$

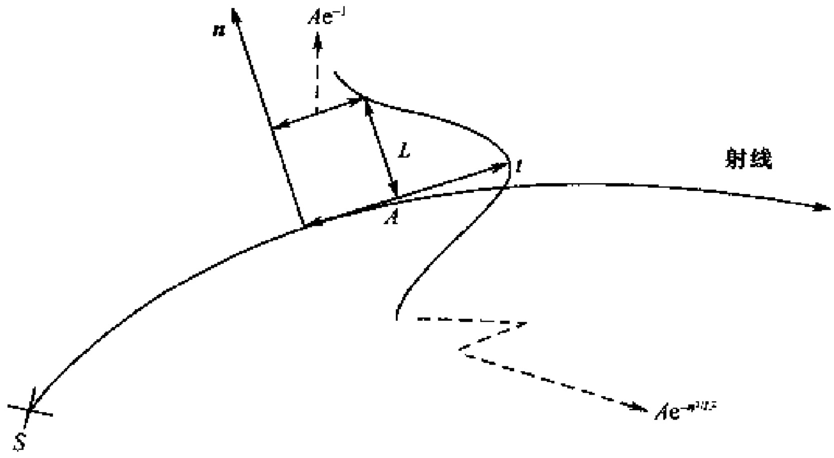


图 52 Gauss 射线束沿射线轨迹的振幅和相应的坐标系

复数 ε 称为 GB 参数而 $p_i, q_i (i=1,2)$ 为下列射线寻迹方程的两个线性独立实数解

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_s p_i &= -\frac{c_{m}}{c^2(s)} q_i(s) \\ \mathrm{d}_s q_i &= c(s) p_i(s) \end{aligned} \tag{7.140}$$

其中 $c_m = \partial_n^2 c(s)$ 表示声速 $c(s)$ 的二阶法向微商。(7.139)式中的条件 $\varepsilon_2 \geqslant 0$ 保证了能量被局限在中心射线的邻域内。

(7.136)式表明每一射线束的振幅随离开中心射线的距离按 Gauss 分布减小(参见图 52)，而这正是"Gauss 射线束(GB)"之所以得名。方程组(7.140)可用求解射线方程的相同标准数值技术沿每条射线以逐步法求解。在声速梯度为线性的情形下该方程组由于 $c_m = 0$ 而得到简化。

$s=0$ 时的初始条件为[216]

$$p_1(0) = 0, p_2(0) = 1\mathrm{sm}^{-1}$$

$$q_1(0) = 1\mathrm{m}, q_2(0) = 0$$

应当指出：射线束解仅当以射线为中心的坐标系在中心射线附近的某区域内为明确确定的和常规的时才是正确的。

将比值 p/q 的实部和虚部分开，(7.136)式可写为

$$u(s,n,\omega) = \left[\frac{c(0)q(0)}{c(s)q(s)}\right]^{1/2} \exp\left\{-\mathrm{i}\omega\tau + \mathrm{i}\frac{\omega}{2c(s)}K(s)n^2 - \frac{n^2}{L^2(s,\omega)}\right\} \tag{7.136′}$$

其中的 $L(s,\omega)$ 控制了射线束的宽度并由下式给出

$$L^2(s,\omega) = -\frac{2}{\omega}\left\{\mathrm{Im}\left[\frac{p(s)}{q(s)}\right]\right\}^{-1} \tag{7.141}$$

而波前曲率 $K(s)$ 由下式定义

$$K(s)=-c(s)\mathrm{Re}\left[\frac{p(s)}{q(s)}\right] \tag{7.142}$$

由复 GB 参量((7.139)式)可以构成射线束的特性(主要是束宽 $L(s,\omega)$和波前曲率 $K(s)$)。确定中心射线附近区域的大小,即可将这一复参量选取得使射线束解有效。束宽 $L(s,\omega)$定义为中心射线到 GB 振幅降为中心射线上振幅的 1/e 处的距离(参看图 51),$L(s,\omega)$与频率的平方根成反比,所以高频射线束比低频射线束窄,相位变化率与局部曲率有关,以此为基础可说明 $K(s)$就是曲率[212]。

在常规的射线理论中,p 和 q 均为实数而 $q(s)/c_0$说明了“扩展损失”。在焦散线上射线理论之所以失败就是因为扩展变为 0,而(7.136)式成为发散的。在 GB 法中不会出现这种问题,因为 q 不为 0。

GB 法的第三步是将通过接收器 R 邻域的所有 GB 叠加起来。以 α 表示射线相对于通过声源的任意轴线所成的发射角,那么接收点处的总场就是

$$U(R,\omega)=\int\phi(\alpha,\omega)u(s,n,\omega)\mathrm{d}\alpha \tag{7.143}$$

这里的积分遍及所有射线束;解 $u(s,n,\omega)$由(7.136)式算出,而 $\phi(\alpha,\omega)$称为“权函数”。权函数可按如下方法确定:将声源处的波场展开,并使(7.143)式中积分的高频渐近行为与声源在均匀介质中情形的严格解相匹配。可以证明[216]

$$\phi(\alpha,\omega)=\left[\frac{\omega}{2\pi\mathrm{i}c_0}\right]^{1/2}F(\omega)G(\alpha), \tag{7.144}$$

其中 c_0 为声源处声速,$F(\omega)$为声源频谱而 $G(\alpha)$为声源的幅射特性。实际上积分(7.143)是用离散化的方法来进行数值估算的。

用 GB 法所得结果的质量好坏对 GB 参数 ε 的选择极端敏感。关于 ε 的选择在文献[212]中有详尽的讨论,在其中研究了几种选择方案,而我们认为最佳的一种是:控制束宽 L 使其在接收器处不变得过大,从而能量就集中在中心射线附近。通常在地面上空的大气传播中,典型的声源高度和接收器高度均在 1 至 5m 之间。如束宽 L 过宽,那么与中心射线相关联的射线束的底端在掠过地面时就会从地面下方通过,从而在(7.143)式的求和中就会被截去一部分。

在向下折射传播的情形中,如接收器不太靠近地面,则 GB 寻迹能给出令人满意的结果;如接收器只高出地面几个波长,也会发生上述那种求和式被截短的后果。在向上折射传播的情形,GB 寻迹仅在“有声区”和影区边缘附近才能给出满意的结果;而在影区内,GB 解将出现重大偏差而给出过低的声级预报,原因是:为了避免过宽的射线束掠过地面时会使求和式截短而使用窄射线束。

第 8 章　大气声遥感

“遥感”系指以某种手段在远处测定某一目的物的位置、形状、性质和状态的技术，因而“大气声遥感”就是以声波为手段在远处探测大气状态和其中现象的技术。有趣的是，英文“sound”一词作为名词是“声音”的意思，作为及物动词时就有“探测”的意思，由此也可见“声”与“探测”关系之紧密。

声波之所以能成为遥感大气的重要手段，是因为声波在大气中传播时强烈受制于大气“宏观结构”和“微观结构”。正如在前几章中所看到的，前者导致声波的反射和折射，后者导致声波的散射。利用这些结构与声波传播路径或强度的对应关系，即可“感知”大气的状态和其中发生的现象。从这一意义上说，也可将本章所要讨论的问题看成是大气声学(即以前各章所已讨论过的主要问题)的“逆问题”。

遥感技术包括有源(或主动)和无源(或被动)两种方式。前者在测量处人为地、可控制地发出声波，并在同一处(或其附近)来接收通过大气“作用”后的回波，根据其传播时间以及幅度和相位等的变化来判定大气状况；后者是直接测量来自大气中客观存在的声波(其中既有人工源，更有自然源)，由此来判定大气中的相应现象。两种方式一般都以地面为“基地”来进行。

与第 1 章中所提到的“大气声学可分为经典的和现代的两大范畴”这一观点相对应，作为其逆问题的大气声遥感术亦可分为两大范畴：低层大气(对流层)遥感和高层大气遥感。前者的物理基础是大气微观结构对声波的散射，以可听声的主动遥感为主；而后者的物理基础是大气宏观结构对声波的折射，以次声的被动遥感为主。

第 I 部分　低层大气遥感

8I.1　探 测 系 统

低层大气遥感的主要对象是大气温度和风速随高度的变化状况(剖面)。所用的主要仪器是 McAllister 于 1968 年发明并在 1972 年取得专利的回声探测器(echosonde)以及后来加以发展改进的“声达(sodar)”和 Doppler 回声探测器。这种仪器的引进使对大气的研究增添了有力工具，有人甚至认为它开创了大气声学的“新纪元”。

在过去 10 年中，声雷达观测技术与计算机技术保持了同步发展；在处理 Doppler 信号和分析探测结果方面取得了长足进步。更多有效的新方法被发展用来从环境噪声和地面漫反射中分离出声雷达回波信号。

不同结构的小型声雷达，包括多频率系统，已被发展出来并已商业化[217]。现在它们在研究低层大气边界层(ABL)领域中被广泛采用。天线的设计有了明显的改进，计算机控制的相控阵天线的发展使得使用一个天线进行三波束和五波束探测成为可能[218]。

已发展出估测 ABL 湍流参数和相似性理论定标参数的方法。声雷达数据曾多次与现场测量的结果进行比较，用现代 Doppler 声雷达测量 ABL 的平均风速剖面和风向的精度与传统气象标准相似；在使用声雷达测定垂直温度剖面方面取得的成果相对较少，但仍有很多研究人员对这一难题进行了研究。在一整体系统中，使用无线电探测系统测定 ABL 温度剖面显然更加合理。声雷达测量降雨量特征的方法基本已经进入实用阶段[219]。

由于声雷达精确、廉价和可靠的特点，它不断被应用于检测环境的系统中，它所具有的遥感大气边界层湍流参数的能力是其他方法所不具备的[220]。

8I.1.1 收发合置系统

McAllister 发明的主要特点是将改进的天线设计和 Marti1919 年关于传真记录器的专利结合起来。其天线是一种“收发合置(monostatic)”①结构，即用作发射和接收的换能器是严格等同地(至少是非常接近地)配置着的。图 53 所示基本上为 McAllister1968 年所用设备[221]的简化方框图(虚线部分是后来加的)。在此系统中，一被放大的单频声脉冲 P_T 通过一开关装置送入发射换能器。在一恰当的延迟之后，换能器被开关装置转换为接收模式，而将回声信号 P_R 传入接收放大器，然后送至显示或记录装置(通常为一传真记录器，也有用 A 型示波器或 z 轴调制示波器的)。该装置最重要的特点在于其显示为一实时传真机，可将大气散射的相关性和结构图像地显示出来。所用“合置换能器”最初是一个定位于大碟形天线焦点处的电动式驱动器和喇叭，后来则是由 196 个直径为 20cm 的扬声器组成的阵，其电输入颠值脉冲功率超过 500W。

典型天线所得到的射线束角宽度约在 8~10°之间，之所以要用同一天线来接收和发射，面不采用灵敏度更高的传声器作接收器，理由之一就在于：这一很窄的束宽会导致大得多的信噪比。

对于迄今为止大部分更先进的系统来说，图 53 仍具代表性，只是加进了一专用计算机(图中虚线部分)，以对发射频率、控制发射和接收(包括脉冲长度和脉冲

---

① 此术语采自雷达术。使用“static”的原意仅想区别以地面为基地的雷达与(飞)机载雷达。

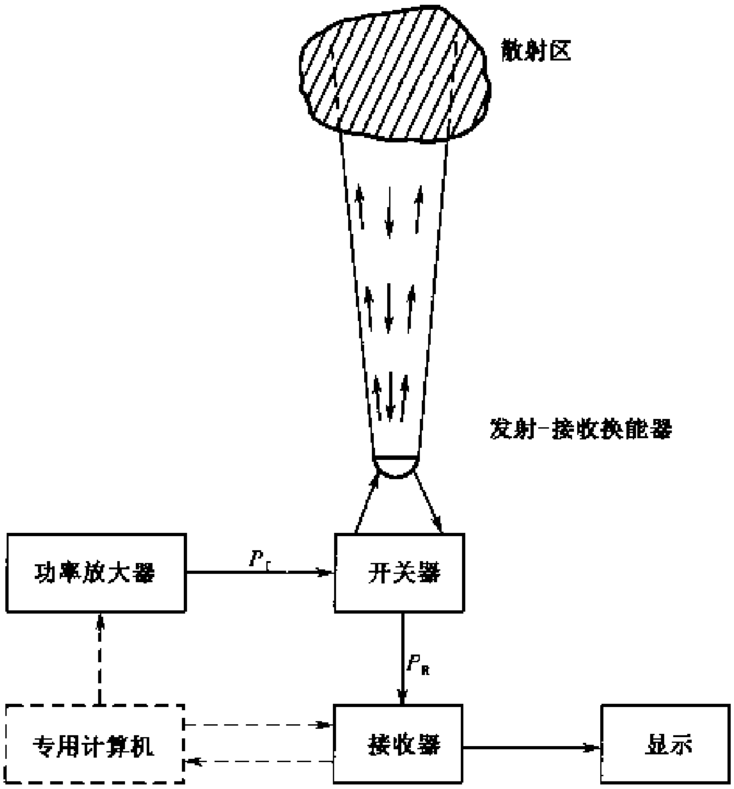


图 53 "收发合置"回声探测器的简化方框图

重复频率)的定时信号等进行调控。用一无源二极管门来防止灵敏的接收线路接收到过强的传输信号,而计算机也用来操纵一有源门,它在天线开始传输的瞬间造成的"空载时间"后开启。

接收到的信号被放大并被滤波以去掉频段以外的噪声成分,然后用一动态范围约为 60dB 的检波器来检测。检波器的输出可被记录下来以供定量分析。在回波的累进距离较长时,就要用一随时间变化的增益来补偿由于球面扩展所引起的振幅损失。

为了取得可检测的回声信号,需要很强的发射功率。这就要求对天线输入强大的电功率,同时要求天线有很高的转换效率和操纵大功率的能力。要使接收到的功率强大,就必须采用采集面积很大的天线,并使其在大气吸收很小的频率上工作。可是如果天线过大,其所发射的射束就会过窄,就会使相当部分的声能由于风的折射而损失掉。

通常可能构制出噪声水平远低于环境噪声(如风、交通、飞机等噪声)贡献的放大器。但在非常安静的环境中,接收换能器中的热噪声可能影响灵敏度的极限。良好的天线设计(如低侧瓣和屏蔽)可使环境噪声的干扰减至最低限度。当连接天线和接收器的电缆过长(50~200m)时,常用贴近天线的低噪声前置放大器来消除

电拾音所造成的问题。前置放大器还包含一升压变压器以使几 Ω 的天线阻抗与几千 Ω 的接收器输入阻抗相匹配。

随着集成电路设计的迅猛发展，在更新近的系统中，天线元件、前置放大器接收电路以及功率放大器等都集中于一个几乎是统一的混合形式中，这样就大大改进了电子性能和可携带性，同时整个系统的价格也下降了[222~224]。

大多数常规声探测器所用的载波频率在 1k～2kHz 范围内，其最大作用距离从几百米至 1km 左右，垂直分辨率从 5 至 20m；如一种商业声雷达，在频率为 1400Hz 时，探测高度可以达到 750m，垂直分辨率为 20m。若在 5kHz 以上的较高频率运转，则有一系列优越性[225]。例如，诸如交通之类的外界噪声源在这样频率下的声输出通常很小，因而就可以最小的声屏蔽在喧闹的城市环境中运转。形体上很小的天线，除了易于携带这一明显优点之外，还意味着它有很短的"混响时间"，即开始传输以后很短的"空载时间"，这就使探测离地面几米这样的短距离成为可能。然而，这些优越性都是以缩减作用距离为代价的，因为在这种频率下大气吸收较大。近年来商用和研究用系统之所以倾向于使用高频，是因为在一系列应用中，声雷达的有效作用距离已不很重要了。

由于当今的电子技术已经能够使探测系统达到几乎是理想的性能，所以声探测器的主要性能往往在很大程度上局限于天线的特性。总的说来，对于一有效的收发合置天线的基本要求是：(1)很窄的射线束主瓣，使得能探测一轮廓分明的大气范围；(2)很低的侧瓣，以最大限度地减少从附近固体物上的反射和对外界噪声源的接收；(3)高发射效率，以便用实际上可接受的电输入功率取得强大的声输出功率；(4)高接收效率(很多情况下等于发射效率)，以避免接收信噪比因接收器噪声而降级。

8I.1.2 收发分置系统、Doppler 回声探测器

在收发分置(bistatic)系统中，接收天线与发射天线不再"合二为一"(或者相距很近)，而是相距很远地配置着。非常明显，这种系统在使用(特别应考虑到这类仪器总是在野外使用)的灵活性和方便性远不如合置结构，但在某些应用上(特别如对风速的探测上)却有其优越性。可是近年来，这种优越性又为更先进的"三元系统(tristatic)"所压倒，因此目前已处于被淘汰境地，市场上已很少见到了。

在较早的此类系统中，设计出一组喇叭的线性阵来得到一扇形射线束[226]，但经验表明，必须非常小心地来限制这种接收阵的束宽，或者至少应当显著降低水平方向上的增益，因为一般在水平方向都过于喧闹，使这种系统难以有效运转。当然，如果噪声损害是可接受的，可以考虑同时采用扇形束发射天线和铅直指向的接收束[227,228]。

分置结构的最大价值在于可根据 Doppler 频移对风的铅直剖面进行测量。这

种系统一“股”的几何结构示意地描绘在图 54 上，以相互成直角的水平方向的两“股”，再补充以铅直方向上的 Doppler 测量，即可在回声探测器有效范围内的所有高度上测绘出完整的三维风场。存在着一系列不同的配置，它们各有优缺点，下面所描述的是一种看来灵活性和可靠性都比较高的特殊设计，其优点是接收器在铅直方向很窄的射线束排除了通过低空路径传过来的噪声(如道路交通、远处飞机和居民区等噪声)。发射器天线采用典型的扇形束，它在一角度范围内喷射出起始脉冲，按时选通接收到的脉冲信号就给出每一所需高度上的 Doppler 值。

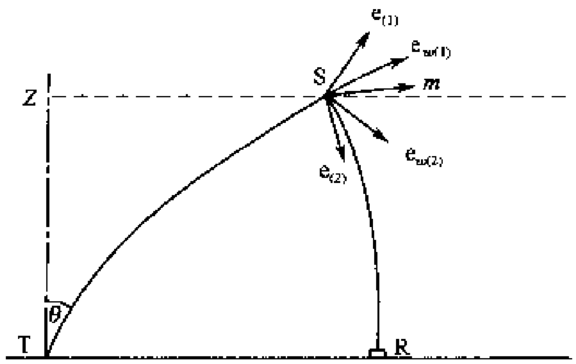


图 54　Doppler 测风的几何结构示意图
T:发射器，R:接收器，S:散射体中心，m 为风速的 Mach 矢，各 e 为相应的单位矢量

风速以矢量 w 或 Mach 矢 $m=w/c$ 来表示，在水平分层以及风的铅直分量和横向分量可忽略①等假定下，Mach 矢的水平分量 m_x 与 Dopplar 频移 Δf 满足以下关系[229]：

$$\Delta f/f=-m_x\sin\theta+(m_x\sin\theta)^2$$

对于收发合置的 Doppler 回声探测器，当 m 指向沿着射线束面且不存在折射时，Δf 满足

$$\Delta f/f=\pm 2m$$

其中正号对应于风吹向天线情形，而负号对应于风吹离天线的情形。

曾提出过从原始数据确定频移 Δf 的多种方法，特别是如何应付几乎是无所不在的噪声问题。常见方法之一是在频率域中应用 FFT(快速 Fourier 变换)，同时设法测量或估算噪声对频谱的贡献，可是 FFT 要求强有力的计算机。而时间域中的 CXCV(复协方差)方法用便宜得多的微处理机即可提供良好的数据，但要求

① 通常在一相当长时间(如 20min)内取平均即可消去任何铅直风的影响；可是一整套探测系统常会面临如下情况：对于系统某一“股”来说，横风可能会变得重要，或是其他的简化假定不能成立。在这种情况下会得出更复杂的结果，参阅文献[222]。

小心选择采样频率和滤波器通带；一种对采样频率的选择是使 Nyquist 频率(数值采样信号中所容许的最高频率)保持在滤波器半功率点附近以最大限度地减少混叠。第三种处理法是采用实质上由一系列窄带带通滤波器构成的"梳状滤波器"；典型的载波频率接近 2kHz，而每个"梳齿"约为 4Hz 带宽。

随着廉价计算机储存量的增大，现在的探测器设计者就可以选择完全的相干性信号处理，例如，可以同时按振幅和按相位平均信号，从而使无规噪声降为很次要的问题。由于雨滴击打接收天线造成噪声，使探测器无法在雷雨中使用。反之，一种由 E. H. Brown 于 1984 年取得专利的、亦可兼测温度剖面的所谓"回声仪"，借助于相干处理，却能在暴雨中运转自如，并给出与实际非常吻合的数据。因此，对探测器数据进行类似地相干处理，大幅度提高信噪比是行之有效的。

现在简单介绍一下前面提到过的"三元系统"。这种系统由三个置于同一地点但指向三个不同方向的收发合置结构组成，它们之间以电子装置达到同步。这种系统可使硬件系统大为简化，但当由于三个不同散射区之间的分离而使大气水平均匀性不足时，会产生极大误差。

8I.2 声探测的物理基础

如本章一开头所指出的，对流层大气中声振测的物理基础是声波在大气不均匀性上的散射，本节正是结合声探测这一实际应用对声波的不均匀性上散射作进一步的讨论。因此可以看成是对第 4 章第 4.2 节的补充延续。

8I.2.1 以脉冲探测大气不均匀性的原理

设发射天线在时刻 $t=0$ 发出一持续时间为 τ、频率 f 接近常数的脉冲，而 $\tau f\gg1$。天线到散射体(所欲探测的区域)的距离 r_s 略大于 $c\tau/2$，并使散射体处于天线的远场范围。对于离开有限尺寸声源(有别于点源)足够远距离处的声压，可以写出[60]

$$p_i=\frac{D}{r}F\left(\theta,\varphi,t-\frac{r}{c}\right) \tag{8.1}$$

其中 F 为仅当 $0<t-r/c<\tau$ 时不为 0、并在整个脉冲间隔中以角频率 $\omega=2\pi f$ 振荡的函数；θ 和 φ 分别为球坐标中的极距角和方位角；F 的归一化是使 F^2 对时间间隔和对指向散射体的方向(在此取 $\theta=0$)的时间平均等于 1；常数 D 是使 $(D^2/\rho c)/r_s^2$ 为发射时间间隔内散射体处的入射波平均强度。

在此将散射体尺寸看成比 r_s 足够小，因而入射波就可局部地看成是平面波，这样就可以直接应用第 4 章中的结果。

散射波强度 I_{sc} 随径向距离 r 而变并因方向之不同而异：$(\mathrm{d}\Omega\sigma)I_i/r^2$，其中微分

截面 $d\Omega\sigma$ 对于后向散射也可表示为 $\sigma_{后}/4\pi$（参阅第4章第4.1.2节），因而散射回发射天线的强度即成为（当 $0<t-2r_s/c<\tau$ 时）

$$I_{后}=\frac{D^2}{\rho c}r_s^{-2}\frac{\sigma_{后}}{4\pi}r_s^{-2} \tag{8.2}$$

由于 $r_s>c\tau/2$，所以后向散射脉冲并不与入射脉冲交叠，从而在发射终止和回波第一次到达之间的间隔内，换能器的运转模式可以转换到接收状态。总延迟时间乘以 c 后就给出 $2r_s$，因而测出回波强度、再联系到(8.2)式，就足以确定后向散射截面 $\sigma_{后}$。

现在假定 Born 近似成立，即不发生多次散射，这样，在积分方程(4.11)被积式中的 $p(x_s)$ 就可简单地用入射波的复振幅来取代。这样做正如用迭代法来解积分方程，并且第一次代换就能给出令人满意的结果。虽然，一般来说，这就要求：在主要不均匀性出现的任何地方，稳态下的散射波都必须比入射波弱得多，但并没有涉及 γ_k 和 γ_ρ（定义见(4.9)式）大小的简单判据可以建立使这一近似正确的上限。然而，如果 $|\gamma_k|\ll1$、$|\gamma_\rho|\ll1$ 以及 $k|\gamma_k|$ 和 $k|\gamma_\rho|$ 二者的路径积分都比1小得多，就必须给出关于散射场的正确估算。

将方程(4.11)对入射波为脉冲(8.1)的情形作出修正，并接着应用 Born 近似，就给出如下形式的散射波（收发分置系统也如收发合置系统一样适用）：

$$p_{sc}=\frac{-1}{4\pi}k^2D\iiint\gamma_{eff}(\boldsymbol{x}_s)\frac{F(\theta_s,\varphi_s,t-r_s/c-R/c)}{r_sR}\mathrm{d}V_s \tag{8.3}$$

这里 $r_s=|\boldsymbol{x}_s|$ 为发射天线中心（取为原点）到散射点的距离；$R=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s|$ 为散射点 $\boldsymbol{x}_s$ 到接收点 $\boldsymbol{x}$ 的距离；而

$$\gamma_{eff}(\boldsymbol{x}_s)=\gamma_k(\boldsymbol{x}_s)-\boldsymbol{e}_s\cdot\boldsymbol{e}_R\gamma_\rho(\boldsymbol{x}_s) \tag{8.4}$$

其中单位矢量 $\boldsymbol{e}_s$ 和 $\boldsymbol{e}_R$ 分别从原点指向 $\boldsymbol{x}_s$ 和从 $\boldsymbol{x}_s$ 指向 $\boldsymbol{x}$（比较第4章第4.1节中引进的单位矢 $\boldsymbol{e}_k$ 和 $\boldsymbol{e}_r$，二者是类似的）。

对于收发合置结构，$\boldsymbol{e}_s\cdot\boldsymbol{e}_R\approx-1$，因而由(4.9)式给出

$$\gamma_{eff}(\boldsymbol{x})\approx\frac{2\delta(\rho c)}{\rho c}\quad 后向散射 \tag{8.5}$$

其中 $\delta(\rho c)$ 表示大气特性阻抗对其正常值 ρc 的偏差。

对于尺寸比波长小得多的单个聚集不均匀性，应用 Born 近似的结果导致散射波(8.3)与早先得到的(4.4)式一致，这时的后向散射截面(4.7)化为

$$\sigma_{后}=\frac{k^4}{\pi}\left[\frac{1}{\rho c}\iiint\delta(\rho c)\mathrm{d}V\right]^2 \tag{8.6}$$

8I.2.2 用电声换能器为散射区定界

系统中的发射器和接收器均为电声换能器，分别以函散 $i_{tr}(t)$（扬声器激励电流）和 $e_{rec}(t)$（传声器开路电压）来表征发射和接收。对于“机-声换能器”，也可定

义类似的量：无限障板上振动着的刚性活塞为法向速度 $v_n(t)$ 所表征；用作接收器的同一装置则为投射到活塞面上声波所产生的力（设想活塞保持不动）所表征。这两个依赖于时间的函数假定分别与发射声场和入射声场线性相关。

当发射换能器被一复振幅为 $\hat{i}_{tr}$ 的电流以恒定频率 ω 驱动时，它在角坐标 (θ,φ) 的方向上产生一远场辐射声压（参见文献[60]，第 4.10 节）

$$\hat{p} = -\frac{i\omega\rho}{4\pi} M_{tr} \hat{F}_{tr}(\theta,\varphi)\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\hat{i}_{tr} \tag{8.7}$$

函数 $\hat{F}_{tr}(\theta,\varphi)$ 的相位并不重要，它的归一化使得发射器辐射图 $|\hat{F}_{tr}|^2$ 在 $\theta=0$ 时为 1；常数因子 $\omega\rho M_{tr}/4\pi$ 决定于沿该轴（$\theta=0$）的比值 $r|\hat{p}|/|\hat{i}_{tr}|$；如此引进的量 M_{tr} 是对换能器将电流转换为远场声压这种本领的一种恰当描述。

对接收换能器的类似描述使得

$$\hat{e}_{rec} = M_{rec} \hat{F}_{rec}(\theta,\varphi)\hat{p} \tag{8.8}$$

描述出：由来自方向 (θ,φ)、在换能器接收面上标称振幅为 $\hat{p}$ 的平面波所造成的电压。这里的接收器方向性函数也归一化为：在 $\theta=0$ 时 $|\hat{F}_{rec}|^2$ 为 1。常数 M_{rec} 为正入射时的传声器响应，单位为(V/Pa)。等同地，如在离开点 (r,θ,φ) 很远处放置一体积速度振幅（源强度）为 $\hat{U}$ 的点声源，那么(8.8)式中的 $\hat{p}$ 就是 $-(i\omega\rho/4\pi)\hat{U}(e^{ikr}/r)$，而该方程即成为：

$$\hat{e}_{rec} = -\frac{i\omega\rho}{4\pi} M_{rec} \hat{F}_{rec}(\theta,\varphi)(e^{ikr}/r)\hat{U} \tag{8.8a}$$

将上式与(8.7)式比较并参照互易性原理即表明：如换能器为一互易换能器，那么

$$M_{tr} = M_{rec}, \hat{F}_{tr} = \pm \hat{F}_{rec} \tag{8.9}$$

从(8.3)式看出，散射波产生于一源强密度（单位体积的体积速度）为

$$\frac{dU_s}{dV_s} = \frac{\gamma_{eff}(\boldsymbol{x}_s)}{\rho c^2}\partial_t p_i(\boldsymbol{x}_s,t) \tag{8.10}$$

的分布源。接收器电压为每一体积元增量贡献（(8.8a)式）的叠加；入射声压由(8.7)式给出。对坐标系作适当的重新标记和交叉重叠，即可得出

$$\hat{e}_{rec} = \frac{i\omega\rho k^2}{(4\pi)^2} M_{rec} M_{tr} \hat{i}_{tr} \iiint \hat{F}_{rec} \hat{F}_{tr} \gamma_{eff} \frac{e^{ik(R+r_s)}}{r_s R} dV_s \tag{8.11}$$

如明显地加进时间依赖关系，上式可重写为

$$\hat{e}_{rec}(t) = -\frac{\rho k^2}{(4\pi)^2} M_{rec} M_{tr} \iiint |\hat{F}_{rec} \hat{F}_{tr}| \frac{\gamma_{eff}}{r_s R} d_t i_{tr} dV_s \tag{8.11a}$$

其中 $d_t i_{tr}$ 是在 $t-R/c-r_s/c-\varepsilon/\omega$ 时取值，这里 ε 代表 $\hat{F}_{rec}(e_R)\hat{F}_{tr}(e_s)$ 依赖于位置

的相位。

虽然(8.11)式和(8.11a)式都是对恒定频率的传播导出的，但后者亦适用于脉冲传播，由此 $i_{tr}(t)$ 在间隔 $0<t<\tau$ 之内接近于恒定频率，而在此间隔之外为 0 或接近于 0。在以 t 为中心的任一小间隔内所记录到的电压输出主要依赖于介于椭球 $t=(R+r_s)/c$ 与 $t=\tau+(R+r_s)/c$ 之间区域内的散射(参阅图 55)。如果发射器和接收器都是高度方向性的，或者如果(对于收发分置系统情形)发射束和接收束交汇在以点 $\overline{x_s}$ 为中心、与发射器和接收器相距 $\overline{r_s}$ 和 $\overline{R}$ 的局部区域内，散射体积就会进一步受到限制。对于收发合置的情形，将发射束和接收束设想为共轴的并依靠有限的脉冲宽度使散射局限在有限的体积内。

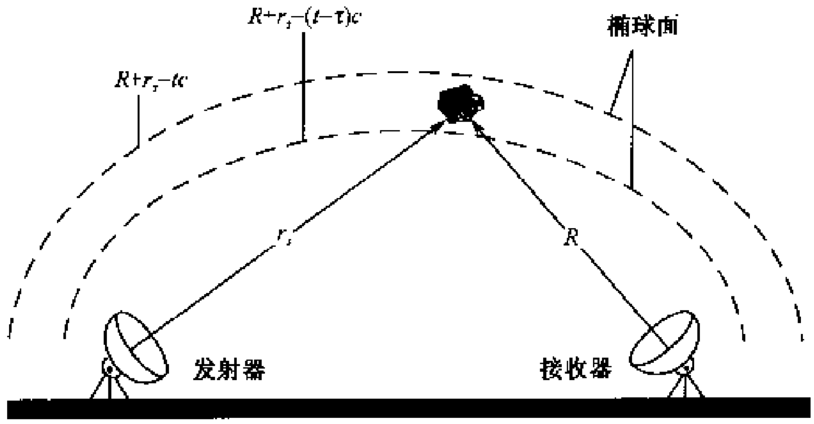


图 55　收发分置探测中以"同心"椭圆对散射区定界

由于在分置系统中，到达接收器的散射波来自一有限体积，而与脉冲宽度的长短无关，故为简单起见，先假定是恒定频率的发射。因为对于从原点到 $\overline{x_s}$ 的方向 $\boldsymbol{e}_s$ 和从 $\overline{x_s}$ 到接收器中心的方向 $\overline{\boldsymbol{e}_R}$，$|\hat{F}_{tr}|$ 和 $|\hat{F}_{rec}|$ 都是 1，所以散射体积主要包含 $|\hat{F}_{tr}|\cdot|\hat{F}_{rec}|$ 大于(譬如说)1/2 的所有的点。在下文中将解释，对该体积大小的估算给出

$$\Delta V_s=\iiint|\hat{F}_{tr}|^2|\hat{F}_{rec}|^2\mathrm{d}V_s \tag{8.12}$$

关于散射体积尺寸比 $\overline{r_s}$ 和 $\overline{R}$ 小得多的假定容许我们在(8.11)式被积式分母中以 $\overline{r_s}$ 和 R 来替换 r_s 和 R。作进一步相应代换后即从(8.7)式和(8.8)式得到

$$\hat{p}_{sc,ap}=\frac{\hat{p}_s}{(4\pi)^{1/2}}\frac{\mathrm{e}^{ik\overline{R}}}{\overline{R}}\psi, \tag{8.13}$$

$$\psi=-\frac{k^2}{(4\pi)^{1/2}}\iiint|\hat{F}_{tr}\hat{F}_{rec}|\mathrm{e}^{i\varepsilon}\gamma_{eff}\mathrm{e}^{ik(R-\overline{R}+r_s-\overline{r_s})}\mathrm{d}V_s \tag{8.14}$$

其中 $\hat{p}_{sc,ap}$ 为从散射体积中心方向投射到接收器上的视在声压，而 $\hat{p}_s$ 为体积中心 $\overline{x_s}$

处的人射波声压。$\hat{p}_{sc,ap}$与$\hat{p}_{sc}$不同是由于接收器对不同到达方向的压力贡献的权重也是不同的。

8I.2.3　声雷达方程

以上表述很容易推广到收发合置情形。这时的情况是:用一互易换能器来探测位于点$(\overline{r_s},\overline{\theta_s},\overline{\varphi_s})$的单个局部化散射体。(8.14)式中的量$\psi$现在可以用一个相应的量取代,使得

$$|\psi|^2 = |\hat{F}(\overline{\theta_s},\overline{\varphi_s})|^4\sigma_{后} \tag{8.15}$$

其中的$\sigma_{后}$对于一小的弱不均匀性由(8.6)式给出。于是(8.13)式就给出声雷达方程①:

$$\frac{I_{sc}}{(4\pi r^2-I_i)_0}\frac{(e^2_{rec})_{av}}{(e^2_{rec})_{av,0}} = \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{\sigma_{后}}{r_s^4}|\hat{F}(\overline{\theta_s},\overline{\varphi_s})|^4 \tag{8.16}$$

其中

$$\frac{(e^2_{rec})_{av}}{(e^2_{rec})_{av,0}} = \frac{I_{sc,ap}}{I_{sc}}$$

为所记录到的均方电压与如相同强度的信号从$\theta=0$入射时所应记录到的均方电压之比。这里I_{sc}为回到换能器的实际声强,而$I_{sc,ap}$为它在回波可看成是来自$\theta=0$方向时的视在值。$(4\pi r^2 I_i)_0$这个量等于$4\pi r^2$乘以$\theta=0$方向上、远场距离r处的发射声强,它可以看成是声功率输出乘以与此方向联系的方向性增益;类似地,$(4\pi r^2 I_i)_0|\hat{F}(\overline{\theta_s},\overline{\varphi_s})|^2$就是功率输出乘以与方向$(\overline{\theta_s},\overline{\varphi_s})$相联系的方向性增益。

8I.2.4　不相干散射、收发分置声探测方程

如果引起散射的不均匀性是散布在整个散射体积中,那么就应当考虑来自各个不同体积元的贡献之间的相对相位。这一点可在(8.14)式中作如下代换而近似地做到:

$$R-\overline{R}+r_s-\overline{r_s} \approx (\overline{e_s}-\overline{e_R})\cdot\xi \tag{8.17}$$

此乃得自$\xi=x_s-\overline{x_s}$分量被截短了的幂级数展开式。以Δk表示波矢在散射过程中所经历的变化$(\overline{e_R}-\overline{e_s})k$,(8.14)式给出

$$|\psi|^2 = \frac{k^4}{4\pi}\int\cdots\int\Phi(\xi)\Phi^*(\xi')\gamma_{eff}(\xi)\gamma_{eff}(\xi')e^{i\Delta k\cdot(\xi'-\xi)}dV_\xi dV_{\xi'} \tag{8.18}$$

其中$\Phi(\xi)$表示在$\overline{x_s}+\xi$处取值的$|\hat{F}_{tr}\hat{F}_{rec}|e^{i\varepsilon}$。

如果$\gamma_{eff}(\xi)$在不同区域内表现为统计上不能辨别,那么无规介质的理想化就

① 之所以如此命名,是因为它是电磁波"自由空间雷达发射方程"的声学对应物。

是适当的。统计上均匀的无规过程(其相关性在一相对短的距离范围内消失)的概念容许 $\gamma_{\text{eff}}(\xi)\gamma_{\text{eff}}(\xi')$ 可以用它的系综平均值(或者等效地,用 $\gamma_{\text{eff}}(\xi)\gamma_{\text{eff}}(\xi+\Delta\xi)$ 的局部空间平均值)来取代;这一平均值就是空间自相关函数 $R(\Delta\xi;\gamma_{\text{eff}})$。当对于任一其数值可与一特征长度(在此长度上 $\Phi(\xi)$ 发生显著变化)相比拟或更大的 $\Delta\xi$ 自相关函数都小至可忽略时,就形成不相干散射模型(据此,被中等距离处不均匀性所散射的声能是可叠加的)。这样的假定使(8.18)式简化为

$$|\psi|^2 = \eta(k,\Delta k)\Delta V_s \tag{8.19}$$

其中 ΔV_s 由(8.12)式定义,而

$$\eta(k,\Delta k) = \frac{k^4}{4\pi}\iiint R(\Delta\xi;\gamma_{\text{eff}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k\cdot\Delta\xi}\mathrm{d}(\Delta\xi_x)\mathrm{d}(\Delta\xi_y)\mathrm{d}(\Delta\xi_z) \tag{8.20}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}k^4 S(\Delta \boldsymbol{k};\gamma_{\text{eff}}) \tag{8.20a}$$

这里 $S(\Delta\boldsymbol{k};\gamma_{\text{eff}})$ 可认为是 γ_{eff} 在波数空间中的频谱密度①。所采用的归一化是使得 $\gamma_{\text{eff}}(\xi)$ 的均方值为

$$\langle\gamma_{\text{eff}}^2\rangle = \iint_0^\infty\int S = (\Delta\boldsymbol{k};\gamma_{\text{eff}})\mathrm{d}(\Delta k_x)\mathrm{d}(\Delta k_y)\mathrm{d}(\Delta k_z) \tag{8.21}$$

方程(8.19)会同(8.13)式导致收发分置声探测方程:

$$\frac{I_{\text{sc,ap}}}{(4\pi r^2 I_t)_0} = \frac{\eta\Delta V_s}{(4\pi)^2\,\overline{r_s}^2 R^2} \tag{8.22}$$

η 等同于单位体积的视在收发分置截面,这里的含义是:散射强度正比于散射体积,这一不相干散射的特点要求:造成散射的不均匀性应无规地散布着,并且与不均匀相关联的任何相关长度都应比散射体积的尺寸小得多。反之,如果散射体积与相关长度相比是很小的,那么由不同体积元所散射的远场声压贡献相位都相同,因而彼此补强;散射就是相干的,而视在收发分置截面就正比于散射体积的平方。

8I.2.5　回声探测器方程

用不相干散射这一理想化假设可对不均匀大气散射的脉冲-回声测量作出透彻的诠释。在这一理想化之后,(8.13)式在收发合置情形下即意味着:

$$\delta\left(\frac{E}{A}\right)_{\text{sc,ap}} = \frac{(4\pi r^2 I_t)_0\delta t}{(4\pi)^2}\,\frac{\eta|\hat{F}|^4\delta V_s}{r_s^4} \tag{8.23}$$

就是由于时间间隔 δt 内从远场点 (r_s,θ_s,φ_s) 处体积元 δV_s 上的散射而在每单位面积上所接收到的视在后向散射能量。量 $(4\pi r^2 I_t)_0$ 代表发射器在时刻 $t-2r_s/c$ 所辐射的功率。因此截至时刻 t,单位面积所接收到的总视在后向散射能量为

① 根据所谓 Wiener-Khintchine 定理,参阅 N. Wiener. Generalized harmonic analysis. Acta Math., 1930,55:117~258。

$$\left(\frac{E}{A}\right)_{\mathrm{sc,ap}} \doteq \frac{1}{(4\pi)^2}\iiint \frac{\eta|\hat{F}|^4}{r_s^4}\left[\int_{-\infty}^{t-2r_s/c}(4\pi r^2 I_i)_0 \mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}V_s \tag{8.24}$$

其中$(4\pi r^2 I_i)_0$在$t'=0$以前大于0而在$t'>\tau$时等于0。取时间微商并接着将r_s的积分变换为对$t'=t-2r_s/c$的积分，即可得出视在后向散射强度

$$I_{\mathrm{sc,ap}} = \frac{c/2}{(4\pi)^2}\int_0^t\left[\iint \frac{\eta|\hat{F}|^4}{r_s^2}\mathrm{d}\Omega_s\right](4\pi r^2 I_i)_0 \mathrm{d}t' \tag{8.25}$$

方括号内的量应被理解为在$r_s=(t-t')c/2$处取值。这里的限制条件是接收时间t必须大于脉冲宽度τ。如进一步将t取得比τ大很多，则上式可近似为

$$I_{\mathrm{sc,ap}} \approx \frac{c\tau/2}{(4\pi)^2}\frac{\eta\Delta\Omega_s}{\overline{r_s}^2}(4\pi r^2 I_i)_0 \tag{8.25'}$$

其中

$$\Delta\Omega_s = \iint|\hat{F}|^4 \mathrm{d}\Omega_s \tag{8.26}$$

应被理解为所探测的立体角。量$(4\pi r^2 I_i)_0$现在表示乘以发射器方向性增益的发射功率在脉冲宽度τ内的时间平均。径向距离$\overline{r_s}(\approx ct/2)$表示离开散射体积(从$r_s=(t-\tau)c/2$延伸到$r_s=tc/2$)的平均距离。量$\eta$为立体角$\Delta\Omega_s$球壳内每单位体积的平均后向散射截面(见(8.20a)式，其中的$\Delta\boldsymbol{k}=2k\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{e}_z$沿着射线束的轴)。像以前一样，$I_{\mathrm{sc,ap}}$为后向散射波在换能器处(计及接收时的指向性响应特性)的视在声强。

在导出(8.25′)式时，不相干散射假定的适用性要求$c\tau$和$\overline{r_s}(\Delta\Omega_s)^{1/2}$都比不均匀性相关长度大得多。如果这一点得不到满足，但散射大气依然是无规的，则(8.25′)就是可能得到结果的总体平均。

将以上考虑推广到收发分置结构脉冲回声探测的情形，得出

$$I_{\mathrm{sc,ap}} = \frac{\eta}{(4\pi)^2}(4\pi r^2 I_i)_0 \iiint'' \frac{|\hat{F}_{\mathrm{tr}}|^2|\hat{F}_{\mathrm{rec}}|^2}{r_s^2 R^2}\mathrm{d}V_s \tag{8.27}$$

其中积分号上的双重撇号表示积分区域是局限在椭球$r_s+R=tc$与$r_s+R=(t-\tau)c$之间。

引进如下的量纲—“状况因子”：

$$A = \frac{\overline{R}^2}{(c\tau/2)\Delta\Omega_{\mathrm{tr}}}\iiint'' \frac{|\hat{F}_{\mathrm{tr}}|^2|\hat{F}_{\mathrm{rec}}|^2}{r_s^2 R^2}\mathrm{d}V_s \tag{8.28}$$

其中

$$\Delta\Omega_{\mathrm{tr}} = \iint|\hat{F}_{\mathrm{tr}}|^2 \mathrm{d}\Omega_s \tag{8.29}$$

为发射束的视在宽度(单位：立体弧度)，$\overline{R}$为从接收器到发射束轴与球面$R+r_s=ct$交点的距离；(8.27)式与(8.25′)式之间的类似就更为突出易见。将(8.28)式代

入(8. 27)式即得到回声探测器方程[230]

$$I_{sc,ap} = \frac{c\tau/2}{(4\pi)^2} \frac{\eta\Delta\Omega_{tr}A}{R^2}(4\pi r^2 I_t)。 \tag{8.30}$$

对于收发合置结构,"状况因子"A 成为 $\Delta\Omega_s/\Delta\Omega_{tr}$;当将一互易换能器既用作接收器又用作发射器时,$A$ 必须小于 1,而对锐利的射线束而言 A 趋于 1。如 $|\hat{F}|^2$ 按 $\exp(-\alpha\theta^2)$随角度 θ 变化(α 略大于 1),则 $A=1/2$;如按$1/(1+\alpha\theta^2)^2$变化,则 $A=1/3$。

8I. 3 声探测器的输出[231]

声探测系统可对低层大气的热结构和力学结构提供定性和定量两方面的信息。前者主要是利用传真记录器所记录到的回波,而后者则利用数据记录器的记录,数据记录通常涉及回声的 Doppler 频移记录和表现热结构状态的声信号强度,下面就结合探测器的广泛应用分别给出这两方面的例子。

8I. 3. 1 热卷流检测

热卷流是出现在对流条件下的特征,起因于为太阳辐射加热的地面附近空气的传导无规加热——无规性可能由于地面漫反射率的变化也可能由于云的存在,它们发源于地面附近的超绝热区,通常可扩展至对流边界层顶部。直接的观测表明:它们对于陆地上空边界层的日演变至关重要,并且是将大量热和湿气从地面带至高处的重要原因,对流的发动时间和对流层深度的变化率在大气污染的研究中有特殊重要性,类似地,在夜间当对流逐渐平息时,湍流的混合作用显著减小,因而大气扩散污染物的能力也大受影响,这样的考虑说明:能够在一长时间内遥感记录对流状况的系统应当是非常有用的。

热卷流可以用常规的高频声雷达记录下来。但在晚近的发展中,传真记录让位于数字打印输出,后者在许多情形下可以提供更有潜力的彩色记录,图 56 上所示为一典型例子,是在平坦地形上空、在晴天用一高分辨率声探测器记录下来的,这种新记录优于传真记录的潜力十分明显,因为它提示出热结构以前不能被观测到的细节。

8I. 3. 2 逆温层监测

声探测最有效的应用之一很可能要算对最低层(几千米之内)大气逆温层的监测,在这样的逆温层中,温度随高度增加,即与对流层中的典型情况(温度随高度的增加而降低)相反。

逆温层在气象学上意味深长,因为它们的存在可能表明强劲风切变的特定区

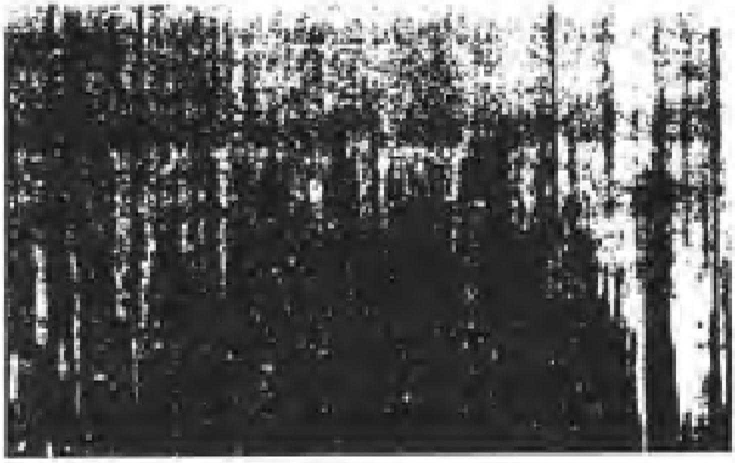


图 56 用高分辨率声探测器记录下的
热卷流典型活动(原图为彩色)

域,这对航空的安全可能是重要的。有时它们也可能限制对流边界层的生长,因此影响许多参量,诸如白昼最高温度、能见度、空气污染物浓度等等。在某些情况下,最低逆温层的高度可取为对流边界层的深度,这对描述低层大气中的湍流是一个重要的定标参量并且与污染物的扩散有关。此外,它们可以有效地阻挡热量、湿气和污染物从地面传递至自由大气,并以这种方式决定性地影响云的形成和近地面层的空气质量。图 57 所示为逆温层记录的典型例子,是由配有传真记录器的常规声探测器记录到的,类似记录在晴朗天气的稳定条件下很容易对任何类型的地形情况得到。



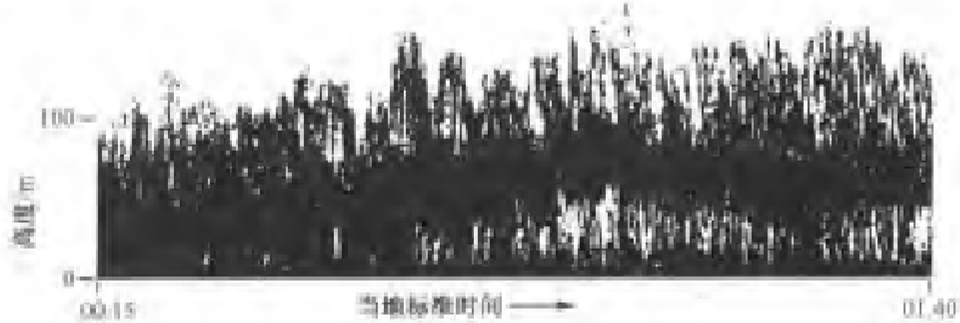
图 57 用常规声探测器记录下的逆温层典型例子

81.3.3 稳定条件和波

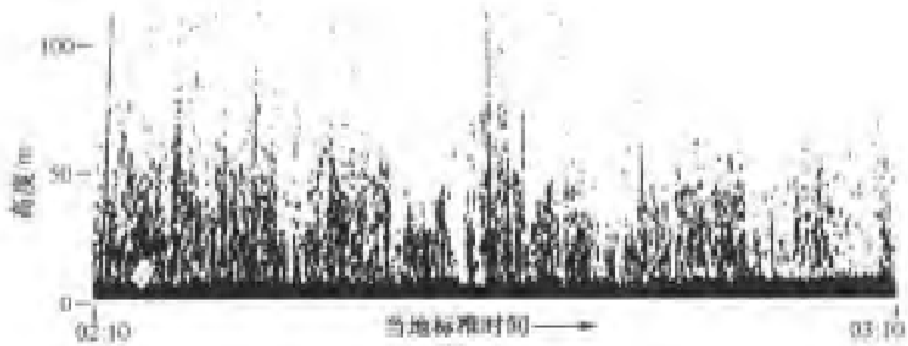
大气以其稳定的分层结构可以维持波动,而对大气数据的诠释也因波与湍流的同时存在而大大地复杂化。这一课题特别与夜间边界层的研究有关。声探测提供了特定情况下在远距离外评估("遥估")波动重要性的极好方法[232]。此外,在

很多场合下波动可以成为不稳定的并形成小块局部湍流，它们在这样的场合下可能是湍流传输的主要来源。这一点对于接近连续稳定的地区（如冬季的两极地区）尤其正确。

为了阐明声探测在这一领域内的潜力，现在提供显示不同状态下边界层的两个例子。图58(a)表示稳定边界层的一个例子，在其顶部伴随着一系列振荡图案，这被认为是由断开的重力波所产生的[233]。图58(b)表明夜间边界层中行为相当不同的图案。这里的声回波是由作用于稳定性很弱的温度剖面（在许多场合下为常见）上的强大混合力（风切变）产生的。在这里应当指出：这些例子只是大量"夜间型逆温层"（根据天气条件因地而异）的小小"样本"。



(a)



(b)

图58　边界层探测的典型例子
(a)稳定边界层结构；(b)稳定度较弱的边界层

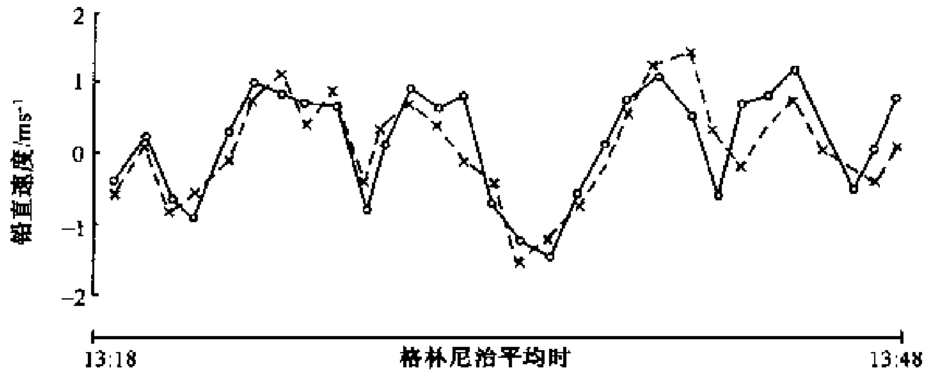
81.3.4　定量比较

为了对声探测器作出恰当评价，必须同时尽可能靠近散射体积进行直接测量。为此目的，可以采用由高塔和绳系气球装载的仪器，虽然直接传感与采样体积之间的距离仍然相当大[234]。与气球电缆相连的直接测量仪器能够测量风分量、绝对温度和温度差以及大气压等[235]。从这些基本量可以估算出风结构参量 C_v^2 和温

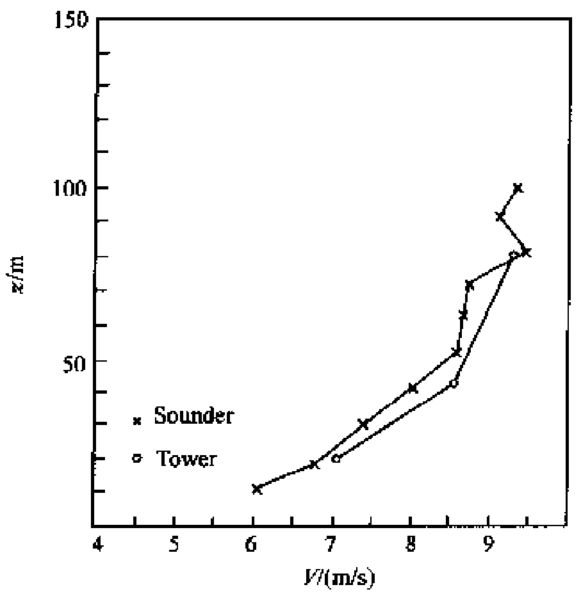
度结构参量 C_T^2 以及相关的统计资料。

利用仔细校正过的高分辨率收发合置声探测器的回声强度可以得到 C_T^2 的剖面。现场测量和"遥估"之间的相符性非常好，尽管个别计算表示的是短时间平均。利用收发合置探测器的 Dopper 频移可以得出对风轴向分量的估值(通常为铅直的)。图 59(a)上给出这一探测结果与直接测量结果的比较。引入更复杂的运转结构如收发分置和三元系统，则可得出对湍流和风的三个分量的估值。图 59(b)给出用高分辨率三元声探测器评估风速的典型例子。由声探测器评估出的平均风速剖面与气象塔的观测相符，当然应考虑到这两种方法的基本差别，即前者为体积平均而后者为定点测量。

综上所述，声探测器已日益被用作低层大气的连续监测器，因为它所给出的大



(a)



(b)

图 59 声探测与直接测量结果的比较

(a)对铅直风速的测量；(b)对风速梯度的测量

×——声探测数据；○——直接测量数据

气特性的实时记录很难用现场传感器等同地取得，而后者还需配置复杂而昂贵的绳系气球、无线电探测器或气象塔。它是研究边界层的有效仪器，增进我们对低层大气中所发生气象过程的了解。特别是，它对在一定高度范围内大气现场仪器的研究结果的诠释方面提供有价值的帮助。声探测系统也提供了大气边界层结构的定量细节。正是在这方面，探测器可用来得到关于温度、风速以及湍流动能耗散率等结构参量的剖面。这些量对大气边界层的基本研究都是很有用的，并且对估计低层大气的混合能力也很重要。

Doppler 技术更有其固有的吸引力，因为它不需要有关天线特性或发射器/接收器增益方面的精确了解。计算机控制的声探测系统可以提供数百 m 高度内平均风速的实时剖面和湍流速度的统计资料。这样的系统对于详细研究大气边界层和建立各种不同地面(或水面)上空风流动的气候学都很有用。

关于声探测器其他可能的应用领域则没什么价值。这是由于：声在空气中的吸收强烈依赖于湿度、温度和声波本身的频率。曾有人建议过利用声探测器对多个频率的吸收进行测量来求得大气的湿度和温度剖面[236,237]，但这只对由于折射率梯度(如同逆温层相联系的)所造成的多路径无线电传播效应有可能的应用。

8I.4　用声雷达获取风速剖面的系统算法[238]

下面介绍一种利用声雷达通过反演方法获取风剖面的技术。这种方法包括：Doppler 频谱谱峰值的确定、平滑处理和利用标准测量数据来组成一种受约束的线性反演。每一个频谱峰值对应于一个风速分量，依据频谱能量将这些 Doppler 估算值加权。由于仪器的局限性和大气中存在的切变力，在不同的层次对风速的估测将会是相互依赖的。这种空间相关性被包含在反演过程中，这种反演方法还可以估测对于不同高度处的信噪比和信号的自由度。

8I.4.1　从声雷达获取的 Doppler 频谱

考虑一台声雷达发射一个声脉冲信号，发射的初始时刻为 $t=0$，频率为 f，脉冲宽度为 τ。湍流在高度为 z 到 $z+\mathrm{d}z$ 处，它将信号的一些能量反射至接收器。由于有天线效率因素、波束发散、大气吸收和湍流散射效率等因素，接收器记录的只是初始脉冲能量的一小部分 $\sigma_s(z)\mathrm{d}z$，其中 $\sigma_s(z)$ 为接收能量的线密度。假定声速为 c，对于在 t 时刻被接收的能量中，脉冲前缘的能量是到达高度 $ct/2$ 并返回的部分，面脉冲后缘的能量则是到达高度 $c(t-\tau)/2$并返回的部分。若发射声功率包络随时间 t 的变化为 $p(t)$，考虑往返路程的时间延迟，则无 Doppler 频移的接收信号的功率为

$$r(t)=\int_{c(t-\tau)/2}^{ct/2}\sigma_s(z)p\left(t-\frac{2z}{c}\right)\mathrm{d}z \tag{8.31}$$

这个接收信号的空间分辨率是 $\Delta z_\tau = ct/2-c(t-\tau)/2=c\tau/2$。每一时刻 t 对应有一个测量区间，并有一个对应的离散功率谱，采样数为 N_s，采样率为 f_s。获得每个频谱所花费的时间为 $T=N_s/f_s$ 且测量区的中心在

$$z_i=\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta z_s \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{8.32}$$

其中

$$\Delta z_s=\frac{cN_s}{2f_s} \tag{8.33}$$

增加高度便得到一系列测量区，直到距离 $ct/2$ 足够大以致接收到的回波信号非常微弱而可以忽略。测量区 i 中功率谱的值 R_{ik} 和频率 $f_{ik}(k=1,2,\cdots,N_s)$ 相对应，其中

$$f_{ik}=\frac{f_s}{N_s}\left(k-\frac{N_s}{2}\right) \tag{8.34}$$

功率谱的一个例子如图 60 所示，谱中既包括信号也包括噪声。



图 60 离散的声功率谱

有很多种方法可以确定对应于风速分量 $\hat{u}_i$ 的频谱峰值的位置 $\hat{f}_i$。例如，可以使用平均频率

$$\hat{f}_i=\sum_{k=1}^{N_s}f_{ik}R_{ik}\Big/\sum_{k=1}^{N_s}R_{ik} \tag{8.35}$$

f_{ik} 可被看作是用来估计 $\hat{f}_i$ 的测量值，并且是功率谱值 R_{ik} 的函数。

8I. 4. 2 Doppler 频谱的空间分辨率

对方程(8. 31)进行 Fourier 变换

$$A(f)=P(f)\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_s(z)\exp\left(2\pi \mathrm{i} f\frac{2z}{c}\right)\mathrm{d}z=P(f)S(k) \tag{8.36}$$

其中 $P(f)$ 为 $p(t)$ 的 Fourier 变换，$S(k)$ 为 $\sigma_s(z)$ 的空间变换，而 $k=4\pi f/c$ 为空间波

数。功率谱为 $R(f)=A(f)A^*(f)$。对于一持续时间为 τ、包络为矩形的脉冲，$P(f)$ 的带宽为 $\Delta f\approx 2/\tau$。这意味着 $S(k)$ 对于 $R(f)$ 的贡献只在空间长度 $2\pi/k=\pm c\tau/2=\pm\Delta z_\tau$ 内才有意义。空间分辨率因此由 Δz_τ 和 Δz_s 中较大的一个决定。

如果存在随高度变化的 Doppler 频移，则方程(8.36)中的变换是不准确的。对于一个频率为 f 的正弦波并且持续时间为 τ、简单矩形包络的脉冲，其解调后的 Doppler 频移频谱为

$$P(f')=\frac{\sin\left(\pi[f'-f_D]\frac{f}{f_0}\tau\right)}{\pi[f'-f_D]} \tag{8.37}$$

其中 f_D 是 Doppler 频移，$f_0=f+f_D$。而由风速分量 u 产生的 Doppler 频移是

$$f_D=\frac{2f}{c}u \tag{8.38}$$

如果在一个测量区内的采样包含了若干个 Doppler 分量的贡献，则得到的频谱是由集中在不同的 f_D 上的谱组合而成

$$A(f')=\int_{z_i-\Delta z_i/2}^{z_i+\Delta z_i/2}\sigma_i(z)\frac{\sin\left\{\pi[f'-f_D(z)]\frac{f}{f_0}\tau\right\}}{\pi[f'-f_D(z)]}dz \tag{8.39}$$

速度频谱的空间分辨率由下面的卷积给出

$$\rho(z)=\frac{\sin\left(\pi\frac{z}{\Delta z_\tau}\right)}{\frac{\pi}{\Delta z_\tau}}\times\frac{\sin\left(\pi\frac{z}{\Delta z_s}\right)}{\frac{\pi}{\Delta z_s}} \tag{8.40}$$

81.4.3 风速剖面的建模

上述的方法显示频谱值 R_{ik} 是在频率 f_k 和高度 z_i 测定的。但实际上 R_{ik} 与其他高度的频谱值也有关。处理这个问题的一个方法是把在不同高度 $z_j(j=1,2,\cdots,n)$ 处的测量值 R_{ik} 写成对于未知的振幅 σ_j 和 Doppler 频移 u_j 组成的加权之和

$$R_{ik}=\sum_{j=1}^{n}\left\{\sigma_j\frac{\sin\left(\pi\left[f_k-\frac{2f}{c}u_j\right]\tau\right)}{\pi\left[f_k-\frac{2f}{c}u_j\right]}\frac{\sin(2\pi[z_i-f_D(z)]/cT)}{\pi[z_i-z_j]}\right\}^2 \tag{8.41}$$

并且通过反演求未知量。这种方法的困难之处在于加权函数对 u_j 的依赖关系具有很强的非线性。一个可以采用的方法是将频率 f_{ik} 作为一种测量值，其精度在某些方面取决于 R_{ik}。例如，如果用频率计分析信号，则最大的 R_{ik} 会决定 f_{ik} 的测量结果。f_{ik} 依赖于速度分量的估值 $u_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的一般模型可以写成

$$f=F(z,u)+\varepsilon \tag{8.42}$$

测量噪声由矢量 ε 表示，并且函数 $F_k(z,u)$ 描述了垂直方向上风速分量变化的模型。一个线性的模型是

$$\boldsymbol{f} = K(z)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{8.43}$$

这里的 $\boldsymbol{K}(z)$ 是加权函数。从而离散的公式为

$$f_{ik} = \sum_{j=1}^{n} K_{ijk}u_j + \varepsilon_{ik} \quad (i = 1,2,\cdots,m;k = 1,2,\cdots,N_s) \tag{8.44}$$

如果将谱峰检测当作一个单独的步骤来完成，以寻找每一个 $\hat{f}_i$，然后反演方程(8.44)来寻找风速分量 $\boldsymbol{u}$，这正好是普通的最小二乘法。寻找一个合适的物理模型 K 和稳定的、并且物理上存在的速度分量估值 $\boldsymbol{u}$，是典型的线性反演问题。在声雷达剖面的例子中，可以加入约束条件(如平滑度，或限制剪切力)，则问题转化为受约束的线性反演问题。举例来说，一个常见的附加约束条件可以是用从以前测得的风剖面的速度矢量的值 u_a 作为标准数据。这会有一个相关的 $n\times n$ 的协方差。

$$\boldsymbol{S}_a = \langle(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_a)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_a)^{\mathrm{T}}\rangle \tag{8.45}$$

若一个已测的速度矢量估值的误差为 $\pm\sigma_a$ 并且值定 S_a 对于单元 σ_a^2 是对角的，则也会有一个 $mN_s\times mN_s$ 的测量误差协方差 S_ε 对于单元 σ_{ik}^2 是对角的。于是预期的速度矢量的值为

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}_a + \hat{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_a) \tag{8.46}$$

且 $n\times n$ 协方差矩阵的反演为

$$\hat{\boldsymbol{S}}^{-1} = \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_\varepsilon^{-1}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{S}_a^{-1} \tag{8.47}$$

通过 n 个 $\tilde{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{S}_\varepsilon^{-1/2}\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}_a^{1/2}$ 的奇异值，λ_i 可以获得信噪比(SNR)的度量和剖面中独立的速度分量的数目。大于 1 的奇异值代表在噪声之上的测量值，所以计算这些值，给出了在噪声之上可以被测量的独立的速度分量数目。SNR 在高度为 z_i 处等于 λ_i，信号自由度的数目为

$$d_s = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^2}{1+\lambda_i^2} \tag{8.48}$$

噪声自由度的数目为

$$d_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1+\lambda_i^2} \tag{8.49}$$

通过上面的讨论可以清楚地知道决定速度剖面准确度的因素有：$\boldsymbol{S}_\varepsilon$ 代表功率谱值 R_{ik} 测量中的噪声，$\boldsymbol{S}_a$ 代表以前剖面数据中的不确定性，$\boldsymbol{K}$ 代表获得平滑剖面的一个模型。

8I. 4. 4　加权函数和协方差

方程(8.43)所表示的模型不一定包括风在不同高度上的相互关联性。例如，

加权函数 K 可能是内插函数，所以风速由测量区决定的不同的高度来估测

$$K_{ijk} = \frac{2fT}{c}\left\{\frac{\sin(\pi[z_i - z_j]/\Delta z_s)}{\pi[z_i - z_j]/\Delta z_s}\right\}^2 \tag{8.50}$$

正如上面所提到的，对任何 f_{jk}，代表真实速度分量的不确定性是以某种方式和 R_{jk} 有关。例如，可以用下面的关系把这种联系建立起来

$$\sigma_{jk}^2 = R_{jk}^2 \tag{8.51}$$

Rodgers[239]给出一种有实际物理意义的、基于 Markov 过程的协方差矩阵

$$S_{ajk} = \sigma_a^2 e^{-|j-j|\delta z/h} \tag{8.52}$$

这里 δz 为 u 的层次在垂直方向上的间隔，而 h 是速度分量的垂直相关长度。方程(8.50)～(8.52)描述了所有由于大气和仪器特点所造成的相关性。

8I.4.5 应用例子

下面给出应用这个方法的一个例子。表 IV 给出的是相关的参数。并且标准测量数据的假设是一个零速度剖面。用声雷达 AeroVironment 4000 测到风速剖面的频谱数据如图 61 所示。在这个例子中 Doppler 速度较小——典型的速度为 1ms^{-1}。图 62 是用灰度图表示的相同的剖面频谱数据。图中间的曲线是利用公式(8.51)的假定、从图 61 反演获取的风速剖面线。

表 IV 反演中所使用的参数

c	声速	340ms^{-1}
F_s	采样率	960Hz
f	发射频率	4500Hz
h	风速的垂直相关长度	10m
m	测量区的数目	40
n	速度分量的数目	30
N	一个测量区中采样的数目	64
T	一个测量区中采样的时间	67ms
Δz_τ	脉冲长度产生的分辨率	8.5m
Δz_s	采样长度产生的分辨率	11.3m
δz	速度估算的垂直间隔	7.6m
τ	脉冲长度	50ms
σ_a	预置标准参数	15Hz

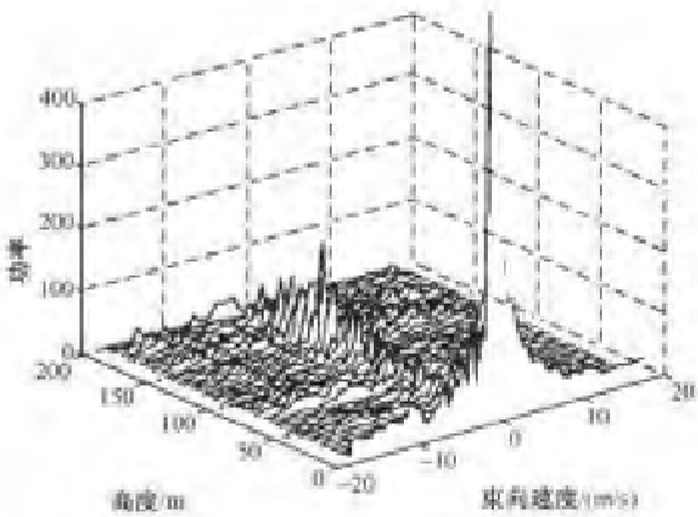


图 61 风速剖面的频谱

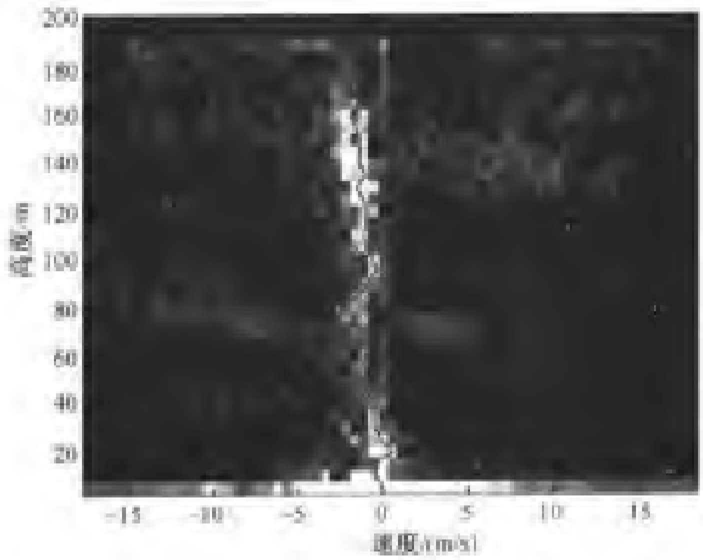


图 62 用灰度图表示的图 61 的数据
图中部的曲线是反演获得的风速剖面

用(8.51)式反演这个剖面大约有 24 个独立信息。这些信息对于解释声雷达资料具有重要的意义，因为它将所使用仪器的因素与真实的大气行为分离开来。这个方法中作了一些假设，例如关于线性依赖于风速的假设，又例如协方差矩阵的形式及其相关长度的假设。但是方法中确保了这些假设对误差的影响是可以被计算的。

8I.5　被动遥感

前已指出，对于低层大气绝对是以主动遥感为主。但被动遥感也是存在的，其中最重要的就是可听声频内雷声的遥感。

雷声是由大气中的闪电产生的声音，其在时间上延伸的长度取决于延伸闪道源所通过的路程长度。如在地面上安置一传声器阵，就可能利用雷声各个可识别短暂片段的方向余弦和到达时间的相关性来再造闪道的形状。在进行一系列研究之后证明这种技术是实际可行的[240]。通常在每个阵中布置 3～4 个传声器；传声器间间距 30～100m 的 Y 形阵被证明最为有效。由于闪道具有许多扭折和弯曲的本性，使声信号随时间面多变[241]。当然，由于大气中的分子吸收，来自闪道较远部分的雷声中高频成分将衰减。文献[241]中给出了对应于不同到达时间的典型功率谱。

为了估算雷声数据，重要的是需要知道温度和风的剖面。这样才能再造返回其源点的各条声线。在文献[242]中，以用间距为 100m 的三角阵收集到的数据讨论了建立闪道几何的分析方法和预期误差。一般说来，闪电放电的水平延伸约为铅直延伸的 3 倍，将声记录重叠在云到地闪击可见部分的照片上，即可确认再造闪道的精度。在确知风和温度剖面的情况下，典型的位置误差看来在 4%以内，如果没有有效风测量可以利用，误差可能达到 10%。

根据对雷声的声学研究，认识到闪电活动在水平方向占优势，并且集中在有冻结现象的云带中。还发现了雷达反射率在云内部的值与闪电活动性之间的正相关关系。因而这种声学方法已在云物理学的重要领域中产生影响。

关于广泛存在于大气中的次声被动遥感，将结合到高层大气遥感中去讨论。

第 II 部分　高层大气遥感

由于大气对声波的吸收基本上正比于频率平方，以目前技术水平所能达到的功率，可听声是无法从地面到达高层(一般定义为 50km 以上)大气的；因此探测高层大气的任务自然地落到次声波头上。然而同样由于技术条件所限，人为地向大气发射大功率次声波非常困难，从而高层大气声遥感几乎只限于被动遥感，而正好大气中的次声波异常丰富，来源各异，根据被动遥感可以获取许多与之相对应的信息。

高层大气遥感与本章第 I 部分所讨论的低层大气遥感当然有许多共通之处，但也有原则上的差异。这主要表现在其物理基础不再是声波的散射而是声波的折射；另一方面，由于涉及到电高层，所以除直接测量声波外，还可以利用无线电探测

器来探测电离层因声波所引起的移动。并且由于相互作用，声波和声重力波也会影响电离层中无线电波的传播。当然，本书只涉及第一种方式。

8II.1　高层大气声遥感的物理基础

8II.1.1　折射

高层大气遥感的物理基础主要是声波在大气宏观结构上的折射。第 3 章中所讨论的“反常传播”现象即起因于声波被高层大气的风和温度剖面折射回地面。由于声波波长(频率极低的次声波除外)通常都比大气变化的尺度小很多，因而高层大气中的声传播可用射线声学观点和与大气宏观结构相对应的折射率结构来处理。

导致声线弯曲的声折射率实数部分主要依赖于空气温度，其次是风。利用水平分层模型可以简单地用 Snell 定律来阐明折射效应。除了频率足够低，以致在运动方程中需考虑重力(如第 6 章所考虑的情况)以外，大气中的声波是非频散的；即它们的折射率实部与频率无关。因此对一种频率计算出来的弯曲对所有频率均适用。

风使折射率成为各向异性的，即依赖于传播方向。实际上折射率实部可写为

$$n = \frac{c_0}{c + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k}}$$

其中 c_0 为一参考声速，c 为静止大气中的局部声速，$\boldsymbol{v}$ 为风速，$\boldsymbol{k}$ 为波矢。

无风大气模型比较容易计算。不同高度的声源可有相应的声线分布，并可表明中层和低热层中的温度结构是怎样使射线弯向地面，甚至引起远程波导传播的[243]。

实际大气中风所产生的折射要复杂得多，通常只能按不同情况逐个建立传播模型。横向风使声波的方位角发生偏转，而沿传播方向上的风影响声波的传播时间和铅直方向的到达角。文献[244]中提出大气风随高度的季节性平均变化模型并用以计算它们对远程声传播中方位和传播时间起伏的影响；发现典型的方位偏离为 5°，而群速度变化为 50m/s。

现在的声线寻迹计算机程序如 HARPA(Hamitonian Ray-tracing Program for Acoustic waves)[245]可以接受大气风和温度的连续三维模型以及不规则的反射地形模型，并可用数值积分 Hamilton 方程(Fermat 原理的微分表示)的方法计算出声线路径。这种程序还可计算出折射率的水平结构，这种水平结构使射线在水平面内弯曲并影响到波的空间相干性[208]。

低频声的远程传播通常更适于依据波导模式来建立模型[246]，这时必须计入高层大气温度和风的影响。关于大气中远程波模式和内重力波模式的理论和观测

的评述可参阅文献[247]。

8II. 1. 2　吸收

声折射率的虚部决定了大气对声波能量吸收的快慢程度，了解吸收如何影响高层大气中的低频声波是很重要的，因为这确定出什么频率的波可以达到什么高度。

在大多数情况下，主要吸收过程来自经典的黏性损耗和热传导，这与高频声的主要吸收机制为分子吸收的情况正好相反（参阅第 5 章）。当然，最大的非经典贡献仍然来自 O_2 和 N_2 的转动和振动转换[248]，但这些贡献通常只在精密估算时才考虑。在文献[249]中推导出声重力波频率范围内（周期约大于 5min）的损耗关系。然而，对于无湍流大气中的纯粹声波，相当精确的吸收估算是可以用理想气体中传播时的振幅衰减系数 α_{cl}（参见(5. 18)式）来计算的[250]。

我们看到，与折射率的实部（“致弯曲部分”）不同，吸收依赖于声波频率，对高频的吸收比对低频的强得多，这一点，结合对大气密度的反比依赖关系，可以得出声波频率与其到达高度之间的对应关系。

根据经验实例，频率为 1Hz 的声波在 100km 高度的衰减率约为 0. 1dB/km[251]。

8II. 1. 3　从声测量推断高层大气性质

只要大气的水平分层假定成立，使 Snell 定律可以适用，就有可能用测量沿地面的水平迹速度（即声波波峰传播的速度，铅直方向的到达角亦可等同地测出）的办法来推出声线顶点（转折点）处的声速。剩下的问题是：这种测量所能应用的高度是多少？即，声线在什么高度上返转？回答这一问题的方法之一是反复试验，即假定一个简单的大气温度模型并按此完成射线寻迹[250]。

获取温度信息的另一途径是：利用声速剖面与行进时间（从而地面行程）对声线转折点处声速依赖关系之间的 Abel 变换关系来进行反演[245]。原则上，高层大气的温度剖面是可以再现的，但实际上，只有剖面上很少几个点可从对一个行程的测量得到，因为通常只有两、三根多途径声线可到达一给定行程，对多个行程的测量可以增加剖面的分辨率，尽管高层大气风使测得的声速实际上是“有效声速”，即静止大气中声速与风在传播方向上的分量之和，风的效应与温度的效应可以用下述两种方法区分开来：将接收器组成一水平环阵，或者将传声方向倒过来，不过无论哪种方法，实践起来都可能过于麻烦。

8II. 2　遥感检测系统

在历史上，声重力波的观测器一直是微气压计型，大多数现代微气压计所记录

的是相对于一"参考体积"(通过一"缓泄管"与大气常通的稳定气压室)的大气压变化(p)。这一缓泄管起着高通滤波器的作用,使仪器的输出表示频率低于"向上转移频率"(由泄管的时间常数确定)时的 $d_t p$ 和高于该频率的 p。高通滤波的另一结果是使背景大气压起伏(其强度在周期较长时增加)"预先变白"或得到补偿。在许多运转系统中,希望记录的是 $p(t)$ 而不是 $d_t p$,所以应将传声器的输出加以滤波,以使整个系统的频率响应在某一所需频带上是相对平坦的。

微气压计通常与"减噪长管"相连接,这种长管的典型长度约为 300m,每隔约 1.5m 开一小孔,其作用是在一特定空间区域内来平均传感器的响应,从而滤去现时被看成是"噪声"的较小尺度压力起伏。这种滤波器也可将传感器的响应(在约 1Hz 以上的)降至寻常噪声水平。诚然,"信号"和"噪声"的定义是任意的,取决于一给定时刻注意的集中所在;因此可设计出空间和时间滤波器以使某种起伏通过,而将被视为"噪声"的、暂时不感兴趣的那些起伏抑制住。图 63 上所示为现代微气压计系统的简化示意图[252]。

当大气波通过时,大气的温度、密度和粒子速度等也和压力一样产生起伏,但大多数传感器均设计为专对压力感应。这部分是由历史原因造成的,但更根本的原因在于仪器的灵敏度问题。压力传感器现已发展到可测量 10^{-8} 的压力变化,或标准压力下的 0.001Pa。所伴随的温度起伏和密度起伏也是同数量级。为使微气压计的灵敏度与可探测的声波相匹配,温度传感器应能测出量级为 8×10^{-7}K 的温度变化;而密度传感器应能测出 10^8 分之一的密度起伏。风速传感器应能测出约 2×10^{-6}m/s 的速度,但是所有这些要求都远远超出目前野外现场仪器的能力范围。由此看来,微气压计就是目前用于被动遥感声重力波频谱中高频部分(周期约在 1s 至几 min 之间)的最灵敏仪器了。

在高频(声频)范围内,与波动相关联的压力、温度、密度和速度等参量的起伏之间的比值保持为常值。例如,压力起伏与粒子速度起伏之间的比值就是介质(大气)的特性阻抗 $\rho_0 c$,这里声速 c=相速度 ω/k。正是基于这一事实,才能容许我们在不指定波频率或波矢的大小和方向的前提下对各参量起伏作出上述估值。然而,对于低频波,重力的各向异性强烈影响波的传播,以致相速度 ω/k 不再等于声速 c,而以一种复杂方式依赖于波频率和波矢大小和方向(参阅第 6 章)。因此,各参量起伏之间的比值也相应表现出复杂关系。一般说来,重力波相速度均低于声速,而压力起伏与速度起伏之间的相对关系也是如此。例如,在对应于其铅直波长 λ_z 比大气标高小得多的长周期重力波的特定渐近极限情形下,$\omega\approx\omega_B k_x/k_z$,所以 $p/v_x=\frac{1}{2\pi}\rho_0\omega_B\lambda_z$(这里 ω_B 为(1.28)式所定义的 VB 频率)。这表明:压力起伏(相对于速度起伏)随着铅直波长的减小而减小。对于一给定的水平波长(或水平相速度),λ_z 的减小对应于波周期的增长。

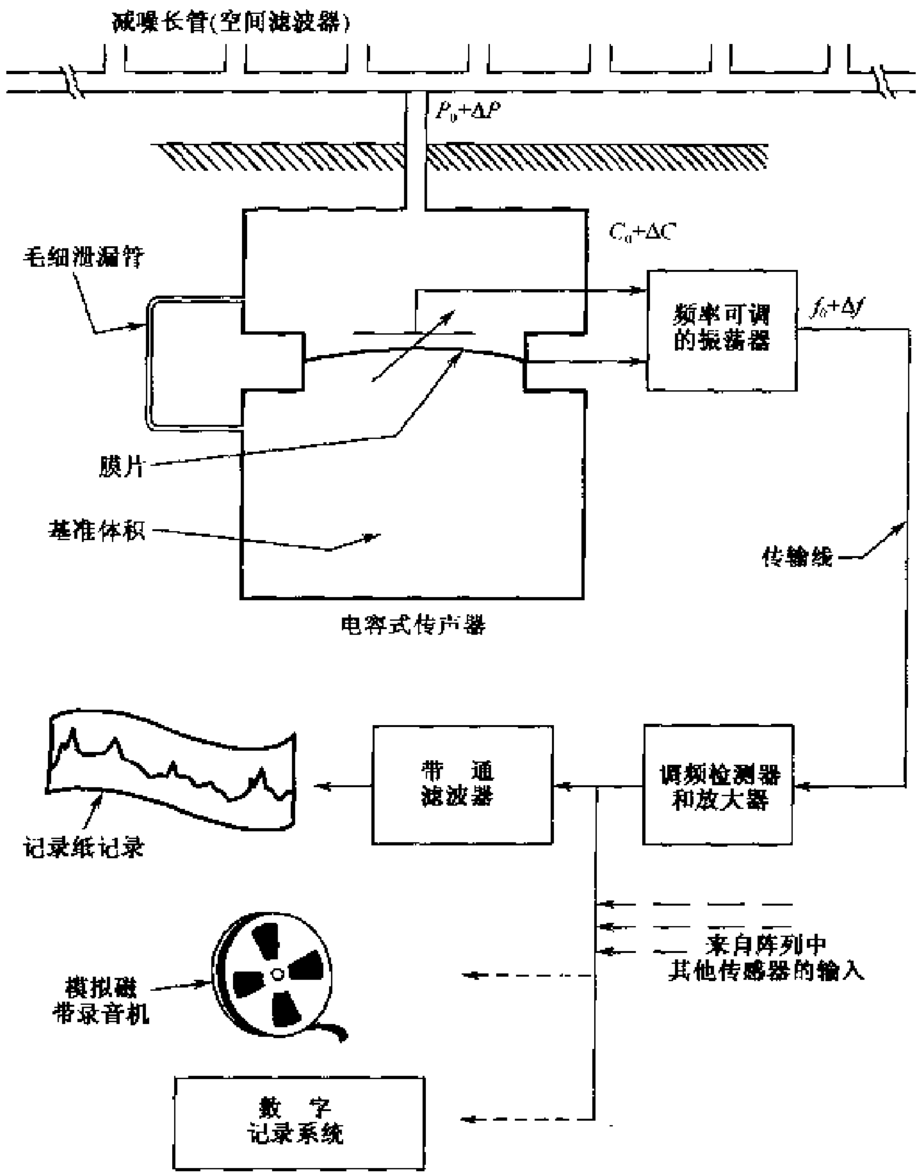


图 63　记录微气压压力起伏的系统

因此，可以开发温度、密度或粒子速度等传感器的性能以用于观测某些内重力波(如自然源的大气波，见第 10 章 10.2 节)。有足够灵敏度和频率选择性的粒子速度传感器还能提供有关波行进方向的信息。自然必须认识到：辅助传感器可对之提高观测能力的频率范围不仅取决于仪器灵敏度，还取决于被测量参量额外起伏的强度(级)。这样的"噪声级"由实验决定。

因为微气压计通常都是安置在地面上，所以也必须了解边界层对压力传感器响应的影响和其他可能的界面影响。非常明显的是在界面上不能存在空气粒子的铅直运动。这一事实本身就要求与平面波相关联的压力扰动(由于入射波加反射

波)是入射平面波本身数值的两倍。但是在地面附近,在确定与波动相关的水平粒子运动(可能还存在界面波)从而压力起伏时,涡动黏性使问题复杂化。此种作用的详情,特别是当它依赖于界面粗糙度时的情形,至今尚不十分清楚,而这一细节正是确切了解"置于地面的压力传感器到底测量出的是什么"所必须知道的。

8II.3 大气中波动的识别

并非大气中所有的压力起伏都是"波"。由非传播的大气运动如平流"湍流"所造成的压力起伏就是"非波"。很明显,要作出这种区分必须依靠空间的和时间的压力取样,并且必须建立判据来评估其鉴别的可靠度。

为了接收到真正的波,只用单个传感器是不行的,必须将它们铺设在地面上组成一二维空间阵。阵中每个单元之间的间距从几百米到几十千米,取决了所欲探测波的波长和空间相干性。当然,若是将压力传感器置于地面上空组成一三维阵,将会提供更多有价值的信息,但是高度非常高的支撑结构和与降低风噪声相关联的机械问题所造成的困难阻碍了这方面的发展。一可识别压力过程到达各个传感器的相对时间即可用来确定该过程通过组阵的速度和运行方向,更完善的相关技术会给出更精确的结果。

当然,由分置的各个传感器所接收到的压力信号之间的相关性并不能自动地从"湍流"或"噪声"中识别出"波"来。如果某过程的相对到达时间表明其行进速度大于当地声速,那也未必能断定它绝非声波,而这样的过程通常被理解为以一定角度斜着到达地面的声波的"迹"。但是,对于移动较慢的过程,"波"与"噪声"之间的区分仅当空间相干性足够高并且波形的周期性足够强时才易于完成。随着空间相干性降低,立即就面临与"波"和"湍流"的定义相关联的概念上的和语义学上的问题,并最终面临建立区分此二者的适宜判据的任务。容许选择数值判据的分析工具由互相关技术(包括互功率谱分析)提供。

研究以分置传感器采样的波场最常用的技术是互相关分析法[253]。两个时间函数 $x(t)$和 $y(t)$的互相关(有时也称为互协方差)函数定义为

$$\phi_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t$$

在此将二函数相乘并在时间位移 τ 变化时对取样长度 $2T$ 取平均。二函数间的对应程度愈高,它们的平均乘积 ϕ_{xy} 就愈大。如 $x(t)$和 $y(t)$是由分置传感器取得的数据,就将使 $\phi_{xy}(\tau)$为极大的 τ 值取作时间位移或信号在二传感器间行进所需的时间。一网络中每对传感器的 τ 值就可理解为信号沿联结该对传感器直线的迹速度。将每一迹速度标绘为从一共同原点出发的矢量,而所有这些矢量的端顶排成一直线时,这样的分析就以很高的置信度给出单个平面波解(见图 64)。

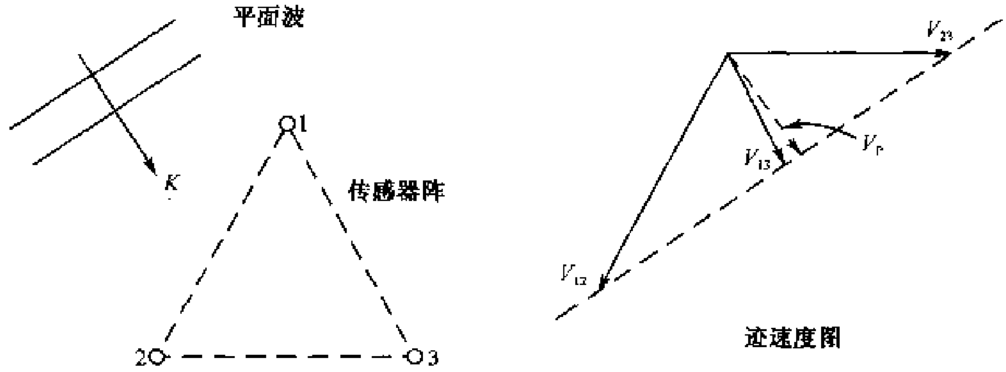


图 64　由测量通过传感器对的迹速度矢构成相速度矢

然而，当记录中包含几个不同速度的频率成分时，单用互相关分析可能误导关于波形的信息[254]。不同频率成分可用取互相关函数 Fourier 变换的方法分离开来，这在互相关函数相对于 $\tau=0$ 是不对称的时为一复数。这一新函数称作互功率谱密度或简单地称为互谱：

$$\phi_{xy}(\omega) \equiv C_{xy}(\omega) + \mathrm{i}Q_{xy}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

其中 $C_{xy}(\omega)$ 和 $Q_{xy}(\omega)$ 分别表示 $\phi_{xy}(\tau)$ 复数谱的同相(共谱)成分和转相(相位差＝90°)成分。被称作"相干性"的量简单地就是平方互谱的归一化量值：

$$\mathrm{coh}(\omega) \equiv \frac{C^2 + Q^2}{E_x E_y}$$

其中 E_x 和 E_y 为上述函数 x、y 的功率谱。互谱的相角给出二记录之间时间延迟 τ_0 与 ω 的函数关系：

$$\omega\tau_0 = \arctan\frac{Q_{xy}(\omega)}{C_{xy}(\omega)}$$

由此可算出速度和到达角对频率的函数关系。

简单地说，互谱的平方值(相干性)描述了：用一系列纯平面波之叠加来表示一给定多传感器阵数据所能达到的精度；互谱的相角可用以算出每个谱成分的速度和到达角。

对各传感器对的互谱进行分析，原则上有助于从漂流涡旋或风载涡旋所造成的起伏中识别出由重叠波动所造成的起伏[254]。如果起伏完全是由波动造成的，应能预期：可观察到记录中不同频率成分以不同速度和不同方向运动着；另一方面，如果涡旋被"冻入"主流中，则应预期：所有谱成分具有相同的速度，即主流的速度，可是在大气重力波情形中，风速常可能接近(甚至超过)波传播速度，以致观察到的波速和方向可能与局部风的情况紧密相关，从而有可能被理解为移流湍流。不能确定这样的波是否能从其他起伏中被识别出；有可能利用压力、密度、温度和

粒子速度等之间的理论预期相位关系来鉴别它们。

8II.4 大气中具体存在着的次声波的被动遥感

大气中几乎是无时无地不充斥着形形色色的波。除了存在于小范围内的可听声频波(其中大多数在通常情况下被视为“噪声”)外,主要是次声频波(包括一般次声波、声重力波和内重力波等)。由于大气对它们的吸收衰减很小,所以可以存在于较长时间内和较大空间中(以至整个地球的大气层中)。这些波来源、性质各不相同,主要可分为人工源和自然源两大类;都与一定的机制和自然现象相联系。通过对它们的接收、定位和分析,可以得出与之相关的各种现象的信息,而对其中(占大部分)的灾害性现象有一定的预报价值。自然声源包括如:大气湍流、火流星、极光、地震、火山喷发、海洋暴风雨、与山脉有关的波、雪崩等等;人工声源则有如超音速飞机或火箭、工业爆炸或核爆炸等。有关大气中的声源我们将在第 10 章中作较详细的讨论。

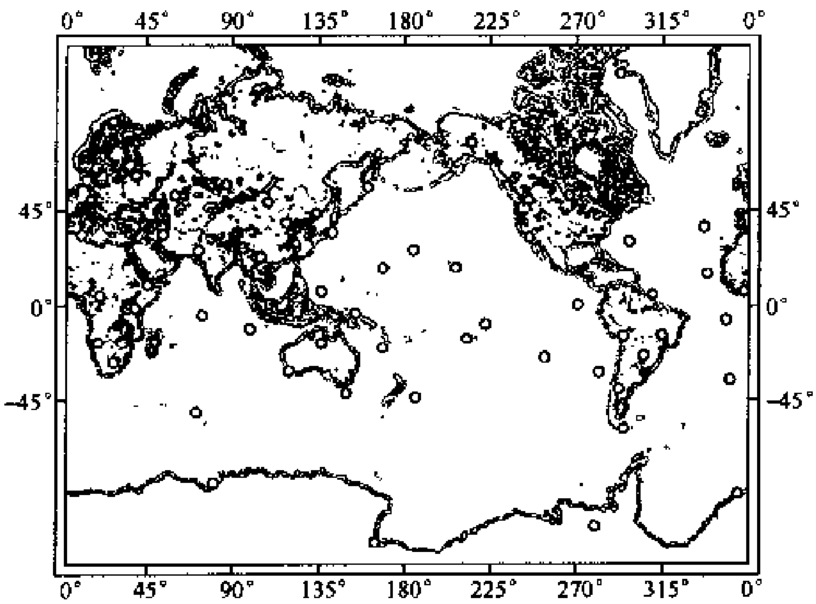


图 65 全球次声监测网络

图内小圆圈代表各个站点

8II.4.1 全球次声监测网络[255]

有许多原因可以在大气中产生次声波。其中,自 20 世纪 60 年代以来,国际上最关注是核爆炸引起的次声波(近年来随着大气核试验的被禁止其关注度已有所降低)。通过对次声波的监测可以发现正在进行的核爆炸试验。为了有效地寻找

核爆炸试验的证据，目前世界上许多国家正在联合建立一个国际次声波监视网络系统(IMS)。这个次声监视网络包括了大约 60 个监测阵列，基本上均匀地覆盖着全球各地，如图 65 所示。每个阵列的尺度约有 1～3km，包含 4～8 个连续工作的监测站。典型监测站的排列如图 66 所示。每个监测站除了监测次声波信号之外，还可检测风速和风向。次声信号是用微气压计进行检测的，次声波采样速率为每秒记录 20 个气压数据；风速和风向的采样速率为每秒一个数据。次声信号经过空间滤波处理，以提高信噪比。阵列中每一个检测站采集的数据被实时传输到中心处理器，然后再通过卫星传送到位于奥地利维也纳的国际数据处理中心。在国际数据处理中心，需要在大量的数据信息中区分次声源的性质、并确定次声源的位置。

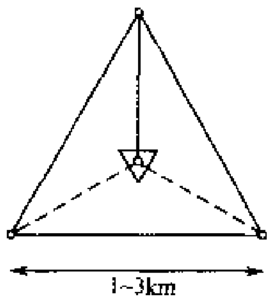


图 66　典型的次声监测阵列。实际的阵列形状并不规则，也不一定是三角形

全球次声监测是一项非常复杂的工作，对声学工作者提出了许多需要解决的技术上和研究上的难题。这些问题在前几章中都有详细论述。为了有效地监测次声波，主要有三方面的问题：次声源是核声源还是非核声源所产生的、声波在湍流大气中的传播和在噪声中识别远处声源发出的微弱信号。首先，我们必须从次声数据中寻找令人信服的证据来证明声源事件是爆炸性的和非天然的。一旦可以排除次声波信号是由核爆炸试验产生，监视的任务就完成了，但监测到的数据还具有科学研究的价值。接着，需要确定次声源的位置，声源参数包括：地理位置、海拔高度和持续时间。从接收到的声信号确定声源的位置，需要利用一个大气模型进行反演计算。目前采用的声传播模型有一些是模拟声波在大气中传播的经验模型。这些包括如前几章所论述的射线方法、简正模式理论和二维抛物方程(PE)方法等。

另外一个问题就是如何在噪声中采集到有用的声信号。目前在全球次声监测系统中，阵列中的每一个典型监测站都是一个空间噪声滤波器。大气湍流噪声是 0.05～1Hz。这个频带覆盖了核监视感兴趣的整个频率区域。我们知道次声信号在 10 至 100m 的空间尺度上是相干的，而监测站点附近大气湍流所产生的次声噪声在 10m 及以下的空间尺度上是不相干的。Daniels 在 20 世纪四五十

年代就提出了减小噪声的方法，将一定区域内的几个传感器采集到的信号和噪声叠加起来可以增加信噪比。如何在较高的频率范围提高信噪比是一个需要解决的问题。

使用正在运行的一部分网络，已经有一些成功的监测结果。例如，2001 年 4 月 23 日在美国夏威夷和加利福尼亚之间发生的大规模流星爆被德国南部的次声阵列在 11 000km 的范围内监测到(图 67)[256]；在加利福尼亚、夏威夷和阿拉斯加的 IMS 次声阵列监测到 2001 年 6 月在太平洋海域的热带风暴"Barbara"。

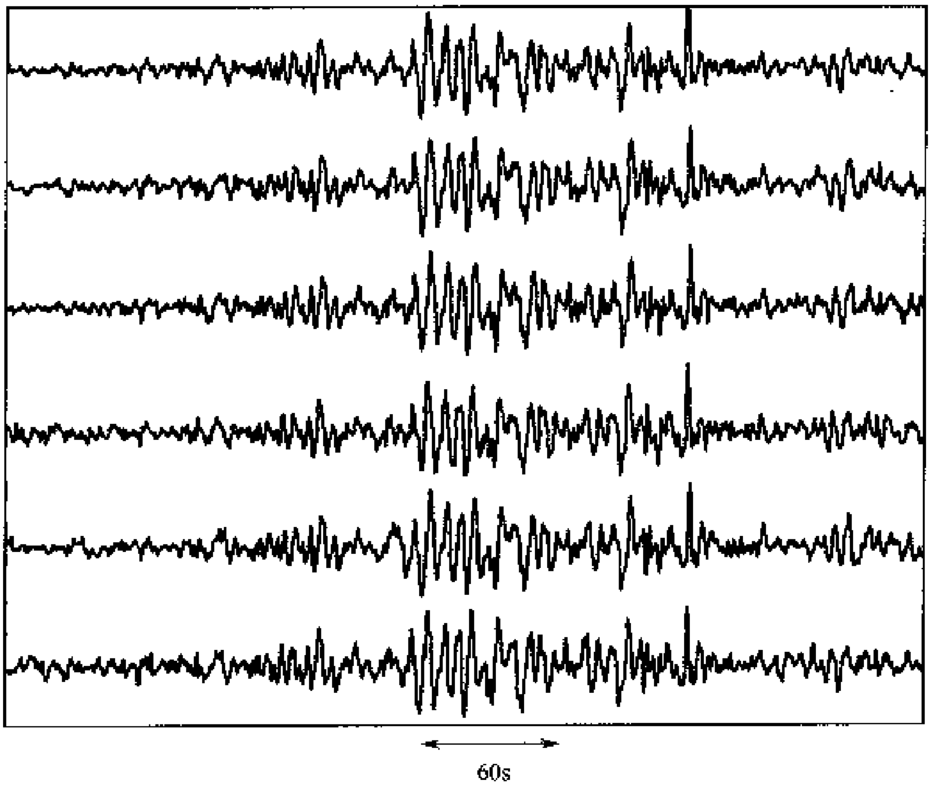


图 67　加利福尼亚的监测记录显示出高度的相关性

爆发点距加州监测站 1800km，位于 11 000km 外的德国监测站也探测到了这个流星雨的爆发

8II.4.2　若干展望

利用声波对高层大气结构和动力学进行探测，在技术上已相当成熟，但大部分观测工作至今仍只是唯象的，而理论工作主要只涉及"前向"传播模型的建立。对于未来的研究，实用的方向应为对低频相干源的改进、对接收阵的精心设计和适当的反演方法等。

利用无线电-声波探测系统(RASS——Radio-Acoustic Sounding System)来测量大气温度这一概念现已在若干国家中得到开发[257]。其原理涉及雷达波从

上行声波所造成的周期性密度起伏上发生共振后向散射，而温度剖面就由雷达回波的 Doppler 频谱推断出来。这种测量所要求的最大高度在目前大约是20km。但 RASS 技术所允许的最终高度极限仍是未知的。研究对流层和中层大气的层析成像方法也有了一个成功的开始，并在继续发展中。现在与声遥感探测有关的大气中声波传播和散射的研究主要有两个方面：一方面是研究声波穿过不均匀各向异性大气的统计特性；另一方面是研究与波传播方向垂直平面上的波场空间结构。

在大气研究方面，这些问题大多与大气中湍流的间歇性和中尺度各向异性的相关结构有关，研究这些结构的基础是它们对声波的散射、折射和非线性现象的影响[258]。为了进一步改善和发展研究大气的声学方法，这些问题在理论上和实验上都需要进一步研究。

第 9 章　非线性大气声学

以上各章所讨论的都是“小振幅”声波，从而相关的方程都可作线性化处理而得到简化。但这只是近似，而声波的本质是非线性的。在某些情况下，流体动力学方程中很小的非线性项可能导致全新而至关重要的现象。如激波，其主要行为就是由于很小的非线性扰动持续积累而发展起来的；再如辐射压，是非线性效应施加到物理实体上一很小但不为零的量值，而它的存在是为线性模型所排除的。

9.1　声传播中的非线性效应[60]

9.1.1　均匀介质中的平面波

还是从理想流体(不计黏性和其他损耗过程)动力学方程出发。为便于阐明基本概念，只限于一维情形，这时连续性方程(1.31′)和运动方程(1.30a)分别成为

$$\partial_t\rho + \partial_x\rho v = 0 \tag{9.1}$$

$$\rho(\partial_t v + v\partial_x v) = -\partial_x p \tag{9.2}$$

一如既往，比熵 s 一直被视为常数，从而密度 ρ 可视为总压力 p 的函数：

$$\rho = \rho(p, s) \tag{9.3}$$

$$x = \text{const.} \tag{9.4}$$

如规定 v 为 p 的单值函数，以致 $\partial_t v = (\mathrm{d}_p v)\partial_t p$ 等等，则上述方程组的一个特解类似于在 $+x$ 方向或 $-x$ 方向传播的平面波。将此假定代入(9.1)式和(9.2)式即给出

$$\mathrm{d}_p\rho\partial_t p + \mathrm{d}_p(\rho v)\partial_x p = 0 \tag{9.5a}$$

$$\rho\mathrm{d}_p v\partial_t p + (\rho v\mathrm{d}_p v + 1)\partial_x p = 0 \tag{9.5b}$$

如系数行列式等于零，则上二方程就完全一致；此一条件(以及 $\mathrm{d}_\rho p = 1/c^2$)导致 $\mathrm{d}_p v = \pm 1/\rho c$。选择正号相当于在 $+x$ 方向的传播，而将(9.5a)式或者(9.5b)式化为非线性偏微分方程

$$\partial_t p + (v + c)\partial_x p = 0 \tag{9.6}$$

另一种处理方法是：定义 $\eta(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho)}{\rho}\mathrm{d}\rho$，以致 $\partial_t\rho = (\rho/c)\partial_t\eta$，$\partial_x p = \rho c\partial_x\eta$ 等等，而方程(9.1)化为 $\partial_t\eta + v\partial_x\eta + c\partial_x v = 0$，$\partial_t v + v\partial_x v + c\partial_x\eta = 0$；当 $v = \eta$ 就得到其特解(简单波)：

$$\partial_t v+(v+c)\partial_x v=0,\partial_t p+(v+c)\partial_x p=0,$$

结果与(9.6)式一样①。

(9.6)式的含义为：如果 $p(x_{观察}(t),t)$ 表示一运动着的观察点 $x_{观察}(t)$ 处的压力，则如 $d_t x_{观察}=v+c$ 那么 p 在时间上将表现为常数。这一时间不变量由将方程 $d_t p(x_{观察},t)=0$ 与(9.6)式加以比较即可得出。因 $v+c$ 是 p 的函数，而 p 对以速率 $v+c$ 运动着的观察者来说表现为常数，所以压力振幅 p 固定的每一点都表现为以恒定速度(与时间无关)在运动着，尽管振幅不同的两点是以不同的速度在运动(见图 68)。

解的参量描述归结为 $p(x,t)$ 在时刻 t 的细节。令 $p=p_0+p'(x,t)$，而 $p'(x,t)=f(x)$ 就给出

$$p'(x,t) = f(\phi) \qquad x = \phi + (v+c)t \tag{9.7}$$

$$p' = f(x-(v+c)t) \tag{9.7a}$$

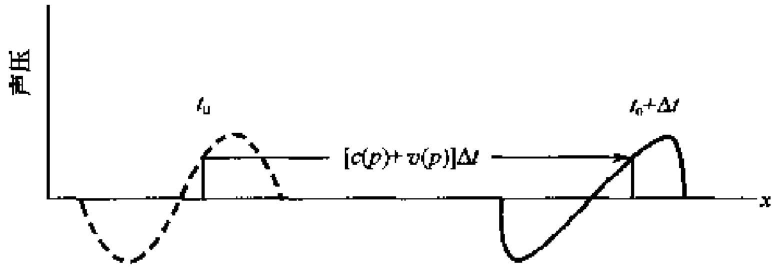


图 68　一平面行波中声压波形的进程
每一振幅区段以依赖于振幅的特征速率 $c(p)+v(p)$ 行进着

其中，v 和 c 均在 $p_0+f(\phi)$ 下取值；在时刻 t，在其上 p' 等于 $f(\phi)$ 的点位移了一段距离 $(v+c)t$，在此距离之外 x 即为 ϕ。

对于小振幅声波，关系式 $d_p v=1/\rho c$ 和 $c=c(p)$ 给出

$$v \approx \frac{p'}{\rho_0 c_0} \qquad c \approx c_0 + (\partial_p c)_0 p' \tag{9.8}$$

在这里假定周围流体的速度 v_0 为零。微商 $(\partial_p c)_0$(在熵为常数下)系在周围状态下取值因而是常数。

可将(9.8)式中的两个表式合二为一：

$$c+v \approx c_0 + \frac{\beta_0 p'}{\rho_0 c_0} \approx c_0 + \beta_0 v \tag{9.9}$$

---

① 参阅 B. Riemann. On the propagation of plane air waves of finite amplitude. Abhandl. Ges. Wiss. Goettingen, 1860；此文重印于：The Collected Works of Bernhard Riemann, New York: Dover, 1953: 156～175。

其中常数 β_0 为

$$\beta_0 = 1 + (\rho c \partial_\rho c)_0 = \frac{1}{2}\left(\rho^3 c^4 \partial_p^2 \rho^{-1}\right)_0$$

(其中第二形式系由$\partial_p \rho^{-1} = -(\rho c)^{-2}$推出)。用另一种方法,如将 p 看成是 s 和 ρ 的函数,那么$\partial_p c^2$ 就是$\partial_\rho c^2/\partial_\rho p$ 或$\partial_\rho^2 p/\partial_\rho p$,从这导出:

$$\beta_0 = 1 + \frac{1}{2}\frac{B}{A} \qquad A = \left(\rho \partial_\rho p\right)_0 \qquad B = \left(\rho^2 \partial_\rho^2 p\right)_0 \tag{9.10}$$

其中 A 和 B 为 $p(\rho,s)$在恒定 s 下的展开式中的系数。对 β_0 的两项贡献,1 和 $\frac{1}{2}B/A$,同流体速度和声速与它们周围环境相应的值之差联系起来。

对于熵恒定时 p 正比于ρ^γ的理想气体,可求得 $A=\gamma p_0$ 和 $B=\gamma(\gamma-1)p_0$,故 B/A 即为$\gamma-1$ 而β_0 即为$(\gamma+1)/2$。对于空气($\gamma=1.4$),$\beta_0=1.2$。对于液体,B/A 的典型值在 4 到 12 之间,所以从这一观点看,液体比气体更为非线性。

利用近似式(9.9)可将(9.7)式重新表为如下形式:

$$p(x,t) = f(\phi) \qquad x = \phi + \left[c + \beta\frac{f(\phi)}{\rho c}\right]t \tag{9.11}$$

在这里我们按惯例舍去了 p'的撇号以及ρ_0,β_0 和 c_0 的足标“0”,因而现在 p 就表示声压而c 就表示环境声速。如在(9.11)中的第二式中略去 $\beta f(\phi)/\rho c$ 这一项,就还原到线性近似下对于一平面行波的熟知表式 $p=f(x-ct)$。

另一种表述涉及 $x=0$ 时 p 对t 依赖关系的细节。采用在第 2 章第 2.6 节中引用过的“波延缓”概念,对于一声压振幅 p 恒定的运动着的点,其“波延缓”近似地为

$$\mathrm{d}_x t \approx \frac{1}{c + \beta p/\rho c} \approx \frac{1}{c} - \frac{\beta p}{\rho c^3} \tag{9.12}$$

于是(9.11)式恰当的对应物就是

$$p(x,t) = g(\Psi)t = \Psi + \frac{x}{c} - \frac{x}{c^2}\frac{\beta g}{\rho c} \tag{9.13}$$

在其中,当 $x=0$ 时,$g(t)$为 $p(0,t)$而 t 为 Ψ。在这里假定了 $\beta p \ll \rho c^2$。

9.1.2 激波简介[259]

从(9.7a)式和(9.9)式可以看到传播速度是波振幅的函数,振幅越大的地方传播越快(见图 68),从而一个简谐波的波形逐渐变成锯齿波。当波前形成一陡峭的突变时就出现激波,亦称冲击波;实际上就是扰动流体中状态参数出现间断的现象。对于理想气体,可用简单方法估算出简谐波转变成激波所需要传播的距离。波峰和波谷传播的速度分别为 $c_0+(1+\gamma)V/2$ 和 $c_0-(1+\gamma)V/2$,其中 V 为质点速度振幅。设波峰传播了距离 D 时刚好赶上前面的波谷,其所需时间为

$$t=\frac{D}{c_0+\frac{1+\gamma}{2}V}$$

波峰赶上前面的波谷所走过的距离差为

$$\left(c_0+\frac{1+\gamma}{2}V\right)t-\left(c_0-\frac{1+\gamma}{2}V\right)t=\lambda/2 \tag{9.14}$$

其中 λ 为波长，从以上两式解出

$$D=\frac{\lambda}{2}\frac{1}{(1+\gamma)M}+\frac{\gamma}{4} \tag{9.15}$$

其中 M 为 Mach 数。频率为 1000Hz 时，波长近似地为 0.3m。如果声源的强度为 100dB，则 $M=2\times10^{-5}$，激波出现的距离为 $D=3541\text{m}$。当声源强度为 180 dB 时，$M=0.2$，激波出现的距离仅为 $D=0.27\text{m}$。上式表明：激波出现的距离和波长成正比，所以在低频时，激波出现的距离需要长一些。如上所述，由于流体动力学的基本方程本质上是非线性的，声波的非线性是本质存在的。如果没有干扰，振幅足够大的简谐波都会变成锯齿波，并且最后形成激波。

下面简单介绍一下激波的一些关系式。激波中，状态参数间断处称为激波面。激波面两侧的状态参数应满足一定守恒条件，将激波面前后两侧分别标记为 1 和 2。采用相对速度 $u=U-v$，其中 U 是激波速度，v 是质点速度。这些条件就是第 1章第 4.3 节中所提到的三个守恒定律：质量守恒

$$\rho_1u_1=\rho_2u_2 \tag{9.16}$$

动量通量守恒

$$p_1+\rho_1u_1^2=p_2+\rho_2u_2^2 \tag{9.17}$$

和能量守恒

$$w_1+\frac{u_1^2}{2}=w_2+\frac{u_2^2}{2} \tag{9.18}$$

其中 $w=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{p}{\rho}$ 为焓。

定义一个激波相对于前方流动的 Mach 数

$$M=\frac{U-v_1}{c_1}$$

可以得到

$$\frac{v_2-v_1}{c_1}=\frac{2(M^2-1)}{(\gamma+1)M}, \tag{9.19}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma+1)M^2+2} \tag{9.20}$$

$$\frac{p_2-p_1}{p_1}=\frac{2\gamma(M^2-1)}{\gamma+1} \tag{9.21}$$

在激波很强的情况下，有

$$\frac{p_2-p_1}{p_1}\to\infty, M=\frac{U}{c_1}\gg 1$$

激波关系可以近似地表为

$$v_2=\frac{2}{\gamma+1}U,\quad \frac{\rho_2}{\rho_1}\sim\frac{\gamma+1}{\gamma-1},\quad p_2=\frac{2}{\gamma+1}\rho_1U^2 \tag{9.22}$$

下面的讨论中，将利用以上的关系式研究激波在大气条件下的传播。

9.1.3 谐波的生成

方程(9.13)的一个内涵是：随着传播距离的增长，从一频率恒定的声源可发展出高阶谐波。例如，我们假定 $x=0$ 处的波形为

$$g(\Psi)=P_0\sin\omega\Psi$$

方程(9.13)就成为

$$p=P_0\sin\omega\Psi\qquad \omega t'=\omega\Psi-\sigma\sin\omega\Psi \tag{9.23}$$

其中

$$\sigma=\frac{x}{\bar{x}}\quad \bar{x}=\frac{\rho c^2}{\beta kP_0}\qquad t'=t-\frac{x}{c}$$

在这里激波形成距离$\bar{x}$为 x 的早期值，在此以后 $\omega\Psi$ 就不再是 $\omega t'$ 的单值函数。

(9.13)式所描述的波形为一 σ 恒定时 $\omega t'$ 的周期函数；这是由于：只要其第二个式子被满足，$\omega t'$ 每增加 2π 必然使 $\omega\Psi$ 增加 2π，而 $\omega\Psi$ 增加 2π 时 p 保持不变。另一推论为：p 必然是 $\omega t'$ 的奇函数。因而，p 的 Fourier 级数展开式就取如下形式：

$$p=\sum_{n=1}^{\infty}p_{n,\mathrm{pk}}(\sigma)\sin n\omega t' \tag{9.24}$$

其中 $p_{n,\mathrm{pk}}(\sigma)$ 为 Fourier 系数，如将 p 看成是 $\theta=\omega t'$ 和 σ 的函数，则

$$p_{n,\mathrm{pk}}(\sigma)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}p(\theta,\sigma)\sin n\theta\mathrm{d}\theta$$

将积分变量变换为 $\xi=\omega\Psi$，于是 $\theta=\xi-\sigma\sin\xi$ 而 $p=p_0\sin\xi$；以上积分就化为

$$\begin{aligned}p_{n,\mathrm{pk}}(\sigma)&=\frac{2P_0}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\sin[n(\xi-\sigma\sin\xi)](1-\sigma\cos\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{2P_0}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[n(\xi-\sigma\sin\xi)]\cos\xi\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

其第二形式系在分部积分后得到。但上式也可写作

$$\begin{aligned}p_{n,\mathrm{pk}}(\sigma)&=\frac{2P_0}{\pi n\sigma}\int_0^{\pi}(\cos n\theta)[1-(1-\sigma\cos\xi)]\mathrm{d}\xi=\frac{2P_0}{\pi n\sigma}\int_0^{\pi}\left(\cos n\theta-\frac{1}{n}d_{\xi}\sin n\theta\right)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{2P_0}{\pi n\sigma}\int_0^{\pi}\cos[n(\xi-\sigma\sin\xi)]\mathrm{d}\xi=\frac{2P_0}{n\sigma}J_n(n\sigma)\end{aligned}$$

其中 $J_n(n\sigma)$为 n 阶 Bessel 函数。

将上式代入(9.24)式即给出 Fubini-Ghiron 解①

$$p = P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sigma} J_n(n\sigma) \sin\left[n\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \tag{9.25}$$

但必须强调此式不适用于 $\sigma=1$ 以外的区域。

参照 Bessel 函数的幂级数展开式表明：

$$\frac{2}{n\sigma} J_n(n\sigma) \rightarrow \left(\frac{n\sigma}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{n!}\left[1 - \frac{(n\sigma)^2}{4(n+1)} + \cdots\right]$$

所以基频波($n=1$)的振幅在 σ 很小时按下式那样减小：

$$p_{1,\mathrm{pk}}(\sigma) \approx P_0\left(1 - \frac{\sigma^2}{8}\right) \tag{9.26a}$$

而一阶谐波($n=2$)按下式那样增长：

$$p_{2,\mathrm{pk}}(\sigma) \approx P_0 \frac{\sigma}{2} \tag{9.26b}$$

可见是随着 x 线性地变化；更高阶的谐波增长得较慢(参阅图 69)。

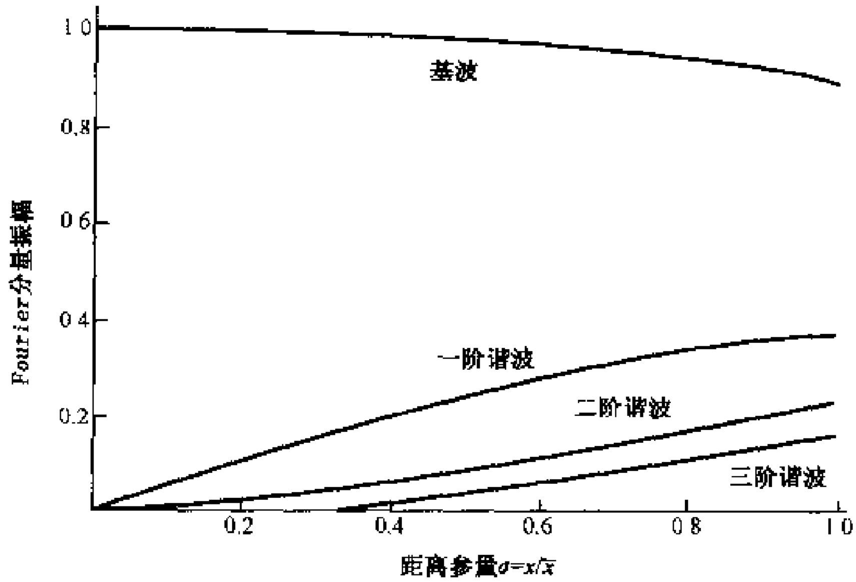


图 69　在 $x=0$ 处为正弦波的平面波，其各阶谐波振幅(以 P_0 为单位)随距离(以 $\bar{x}$ 为单位)的变化

9.1.4　非线性耗散波、Burgers 方程[260,261]

现在计入介质中的吸收，为简单起见只考虑经典吸收，这相当于无弛豫过程的

① 参阅 E. Fubini-Ghiron, Anomalies in acoustic wave propagation of large amplitude, Alta Frep., 1935, 4:530～581；以及 D. T. Blackstock, Propagation of plane sound waves of finite amplitude in nondissipative fluids, J. Acoust. Soc. Am., 1962, 34:9～30。

流体，如单原子气体(或纯水)。如在第5章第5.1节中所述，这时在描述流体运动的方程组中，Euler方程应由Navier-Stokes方程(5.5′)取代。当计入导热性时，物态方程应加以修正。为此先将压力 $p(\rho,s)$ 展开成 $\rho_1=\rho-\rho_0$ 和 $s_1=s-s_0$ 的幂级数，保留到二阶微量：

$$p=p_0+(\partial_\rho p)_s\rho_1+\frac{1}{2}(\partial_\rho^2 p)_s\rho_1^2+(\partial_s p)_\rho s_1$$

考虑到(1.12)式，其第二项即为 $c^2\rho_1$；通过热力学关系可由(5.8)式求出热传导所引起的熵变化 s_1，以之代入上式即得到计入导热性时修正的物态方程

$$p=p_0+c_0^2\rho_1+\frac{1}{2}(\partial_\rho^2 p)_{\rho_0}\rho_1^2-\frac{\kappa(\gamma-1)}{c_p}\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{9.27}$$

以声波扰动(2.1)式代入相应的一维方程组中并只保留二阶项后得到

$$(\rho_0+\rho_1)\partial_t v+\rho_0 v\partial_x v=-c_0^2\partial_x\rho_1-\frac{(\gamma-1)c_0^2}{\rho_0}\rho_1\partial_x\rho_1+\delta\partial_x^2 v \tag{9.28}$$

$$\partial_t\rho_1+(\rho_0+\rho_1)+\partial_x v_x+v_x\partial_x\rho_1=0 \tag{9.29}$$

其中利用了计入热传导的修正物态方程(9.27)，而 δ 即为(5.18)式中所定义的 $\delta=\frac{4}{3}\mu+\frac{\gamma-1}{c_p}\kappa$。

现将 v 看成是 x 和 $t'=t-x/c_0$ 的、而不是 x 和 t 的函数：$v=v(x,t')$ 即将坐标系转换到相应的"第一类伴随坐标系"；在一个波长距离内波的畸变很小，各量在新系统内均为 x 的缓变函数，如 v 为一阶微量则 $\partial_x v$ 即为二阶微量。于是(9.28)式、(9.29)式成为

$$\left(1+\frac{\rho_1}{\rho_0}-\frac{v}{c_0}\right)\partial_{t'}v=\frac{\delta}{c_0^2\rho_0}\partial_{t'}^2 v+\frac{c_0}{\rho_0}\left(1+(\gamma-1)\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\partial_{t'}\rho_1-\frac{c_0^2}{\rho_0}\partial_x\rho_1 \tag{9.30}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{v}{c_0}\right)\partial_{t'}\rho_1-\frac{1}{c_0}\left(1+\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\partial_{t'}v+\partial_x v=0 \tag{9.31}$$

在以上二式间消去一阶项即得出一关于二阶项的方程：将乘以 c_0 的(9.31)式与(9.30)式相加，并以 v/c_0 取代 ρ_1/ρ_0，即得到著名的Burgers方程

$$\partial_x v-\frac{\beta}{c_0^2}v\partial_{t'}v=\frac{\delta}{2c_0^2\rho_0}\partial_{t'}^2 v$$

式中的 β 即为(9.10)式所定义的"非线性系数"(勿与(5.9)所定义的"热胀系数"相混淆)。在 $\beta\to0,\delta\to0$ 的极限情况下，上式的解即还原为理想流体中平面波的线性声学表式 $v=f(x-ct)$。

如将 v 看成是 $x'=x-c_0t$ 和 t 的函数：$v=v(x',t)$，即相当于将坐标系转换到相应的"第二类伴随坐标系"；用完全类似的推导即可得到相应的Burgers方程

$$\partial_t v+\beta v\partial_{x'}v=\delta\partial_{x'}^2 v \tag{9.32}$$

通过一非线性变换可将Burgers方程简化成一线性方程：在方程(9.32)中令

$$v = -\frac{2\delta}{\beta\Psi}\partial_x\Psi \tag{9.33}$$

就可消去非线性项而得到一个线性的扩散方程，

$$\partial_t\Psi = \frac{\partial}{\beta}\partial_x^2\Psi$$

这样，求解非线性 Burgers 方程的问题就简化为求解线性扩散方程。但是这种简化求解的可能性在实际情况下很少见，大多数非线性问题都很难直接求解。下面考虑一个常见的非线性现象：N 波。飞行器在空中以超音速飞行时，就可以产生两个紧邻的、反相的激波。两个激波合起来就形成像英文字母 N 的波形，故名。取线性扩散方程的解为

$$\Psi = 1 + \sqrt{\frac{c}{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\mu t}\right)$$

其中 $\mu = \delta/\beta$。利用变换式(9.33)，得到质点振动速度的解

$$v = -\frac{2\mu\partial_x\Psi}{\Psi} = \frac{x}{t}\ \frac{\sqrt{c/t}\exp(-x^2/4\mu t)}{1+\sqrt{c/t}\exp(-x^2/4\mu t)}$$

只考虑 $t > 0$ 的情形。在给定时刻 t，v 在空间的波形如图 70 所示。由此可以看到 N 波是非线性 Burgers 方程的一个解，即在数学上证明了 N 波可以在大气中传播。曲线 v 下面的面积由积分表示

$$A = \int_0^\infty v\mathrm{d}x = 2\mu\log\left(1+\sqrt{\frac{c}{t}}\right)$$

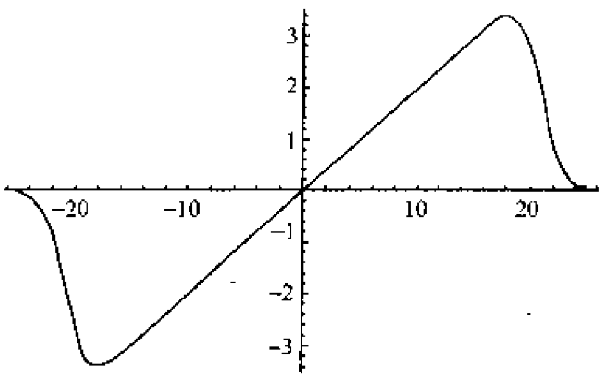


图 70　N 波作为 Burgers 方程的解

利用上式，类比于流体力学，定义 Reynolds 数为

$$R(t) = \frac{A}{2\mu} = \log\left(1+\sqrt{\frac{c}{t}}\right)$$

它给出非线性项与扩散项二者影响之比，此比值随时间变化。当 $R \gg 1$ 时非线性效应占主导地位；而当 $t \to \infty$ 时扩散项将是主要的。并且，质点速度的解也变成

$$v=\frac{x}{t}\sqrt{\frac{c}{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\mu t}\right)$$

这是传热方程的偶极子解。这个解和目前数值模拟结果稍有差别,但主要结论是一致的,即:在传播了很远的距离后,N 波的两个激波的阵面不再是陡峭的了。

9.1.5 在非均匀介质中传播的非线性波

考虑一维问题,z 坐标垂直向上。对于平衡态大气,$p=p_0(z)$,$\rho=\rho_0(z)$,质点速度 $v=0$。由于重力作用,大气保持着压力梯度,密度和压力必须满足方程(1.13);在等温条件下,密度由(1.15)式表示。在非线性条件下,流体力学的基本方程(参阅第 1 章第 1.4 节)可写成

$$\partial_t\rho+v\partial_z\rho+\rho\partial_z v=0$$

$$\partial_t v+v\partial_z v+\frac{1}{\rho}\partial_z p=-g$$

$$\partial_t p+v\partial_z p-c^2(\partial_t\rho+v\partial_z\rho)=0$$

利用特征线方法解以上方程组。微分形式的特征关系表示如下:

$$\mathrm{d}p+\rho c\,\mathrm{d}v-\frac{\rho cg}{v+c}\mathrm{d}z=0,\qquad \mathrm{d}_t z=v+c$$

将这个结果应用于激波即得

$$\mathrm{d}_z p+\rho c\,\mathrm{d}_z v-\frac{\rho cg}{v+c}=0,\tag{9.34}$$

解这样的问题须要数值积分。但对于强激波可以得到一些近似结果。强激波有如下关系:

$$u=\frac{2}{\gamma+1}U,\quad p=\frac{2}{\gamma+1}\rho_0U^2,\quad \rho=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0,$$

其中 U 是激波速度。在极限情况下,U 很大,因此方程(9.34)中的第 3 项和其他两项相比可以忽略。方程(9.34)简化成

$$\frac{1}{U}\mathrm{d}_z U+\frac{\beta}{\rho_0}\mathrm{d}_z\rho_0=0,$$

其中

$$\beta=1\Big/\left(2+\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right)$$

利用上面的方程,最后得到

$$U\propto\rho_0^{-\beta},\qquad p\propto\rho_0^{1-2\beta}$$

这个结果是在质量密度指数衰减的条件下得到。根据实际的大气质量密度数据,结果需要进行适当的修正。

9.2 声　　爆

声爆是飞行器在超音速飞行时产生的一种非线性大气声学现象。当飞行器以超音速飞行时，飞行器前方的空气被挤压，形成很强的高压；而飞行器后方的空气被排开，形成很陡的负压。大气中高压区和负压区结合起来，就形成像英文字母"N"的波形。N 波传播到地面就是我们所听到的声爆。

声爆的基础理论在 20 世纪五六十年代早期就已经建立起来并且被验证，到 20 世纪 70 年代开始被应用于实际模型中。在过去的几十年中，对设计更先进的超音速飞行器提出的要求，和发射空间飞行器以及军用飞行器飞行时噪声对环境影响的评估，都促使有关声爆问题的物理学得到了极大发展。对于一些重要现象，例如：激波厚度和在湍流中传播等问题都得到了研究。但由于问题的复杂性，对于物理现象的细节必须用数值模拟方法来处理，故最新的声爆研究以数值模拟为主。由于计算机技术的迅速发展，声爆理论已经应用于空气动力学问题的数值模拟和设计中。

9.2.1　声爆基础理论[259]

声爆分析在空间中可分为三个区域："近场"，"中场"和"远场"。对这三个区域的研究分别对应于声爆的产生、传播和演化。近、中、远场间的边界取决于具体的环境情况。近场是一个足够小的区域(一般只有物体长度的几分之一)以致大气梯度不起重要作用。对于小型的飞行器如战斗机，远场范围最小也在 1500m 以外。对于大型的飞行器，例如计划中的 90m 长的超音速客机，在距离航线 15km 以外的地面上所接收到的信号仍然属于中场。

一架以超音速运动的飞行器在大气中产生扰动。在"近场"，对于细长的飞行器或抛射物，这种扰动很小，以致其行为可以用声学的线性近似来处理。因此，在传统的细长形物体的声爆理论中，飞行器对大气的扰动可以用线性的超音速流动理论来描述。

钝形的飞行物体(如航天飞机)对于空气的扰动在本质上是非线性的，故其近场理论比细长形物体理论要复杂很多。

飞行器产生的扰动穿过大气向地面传播，基本上可以处理成一个向外传播的柱面波。由于大气介质是非均匀的，在飞行器和地面之间的声阻抗会发生变化，所以波前的曲率也会发生变化。对于弱激波和简谐波，用几何声学的方法就可以较好地描述空气扰动的传播规律。

当传播距离足够远时，信号的波形会产生变化。这是由于即使是很弱的信号，经过长距离的传播，累积的非线性效果也会变得非常明显。信号中压力高的部分

的传播稍快于大气中声速，而压力低的部分传播得稍慢。这种形变通常会导致信号转化为激波，对于远场信号更有变为 N 波的趋势。

信号在中场开始出现明显的非线性失真，但是飞行器的几何特性的效果依然很明显。信号在远场接近一个渐进的外形，一般是一个 N 波，也就是一个声爆。

下面分析声爆所产生的声压。设 U 为飞行器相对于流体的速度(平行于 x 轴)，扰动速度在 x 轴和径向坐标 r 轴(垂直于 x 轴)方向的分量分别写为 $U(1+u)$ 和 Uv，则考虑柱面波的解有

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{x-Br}\frac{S''(\eta)\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2-(Br)^2}} \tag{9.35}$$

$$v = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{x-Br}\frac{S'(\eta)\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2-(Br)^2}} \tag{9.36}$$

其中 $B=\sqrt{M^2-1}$，并且 $S(x)$是从顶端到 x 处的截面积。扰动被限制在 Mach 角内，由方程 $x-Br=0$ 确定。采用 Landau 提出的方法[262]，将上式作非线性化处理。应该说明的是：作非线性化处理的解并不是对应的非线性方程的精确解，但理论分析表明这样的处理可以描述弱非线性效应。令 $x-Br=\xi(x,r)$(下面将讨论对 ξ 的选择)，(9.35)式和(9.36)式变成

$$u = -\frac{F(\xi)}{\sqrt{2Br}}, \qquad v = -\frac{BF(\xi)}{\sqrt{2Br}} \tag{9.37}$$

其中

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\xi}\frac{S''(\eta)\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\xi-\eta}}$$

被称为 F 函数，代表声源强度，包含飞行器作为声源的特性。根据 Bernoulli 方程可以得到压力和流速的关系，并利用(9.37)式得到

$$\frac{p-p_0}{p_0} = \gamma M^2\frac{F(\xi)}{\sqrt{2Br}} \tag{9.38}$$

其中，p 是扰动后的压力，p_0是平衡态时的气压。利用声压和声速的关系得到

$$\frac{c-c_0}{c_0} = \frac{\gamma-1}{2}M^2\frac{F(\xi)}{\sqrt{2Br}} \tag{9.39}$$

其中 c 为非线性波声速，c_0为线性波声速。因为 $\xi=\text{const.}$，有

$$\mathrm{d}_r x = \cot(\mu+\theta) \tag{9.40}$$

其中 $\mu=\arcsin(c/U)$ 为 Mach 角，θ 为波前与 x 轴的倾角。取适当的近似，在一级近似下展开得到

$$\partial_r x = \cot\mu_0-(\mu-\mu_0+\theta)\operatorname{cosec}^2\mu_0 \tag{9.41}$$

在同级近似下有

$$\theta \approx v, \mu - \mu_0 \approx \frac{c_0}{U}\left(\frac{c - c_0}{c} - u\right)\sec\mu_0 \tag{9.42}$$

利用上面的式子得到

$$\partial_r x = \frac{1}{B} - \frac{M^2}{B}\left(\frac{c - c_0}{c} - u\right) - M^2 v \tag{9.43}$$

将方程(9.37)和(9.39)代入(9.43)式得

$$\partial_r x = \frac{1}{B} - \frac{(\gamma - 1)M^4}{(2B)^{3/2}}\frac{F(\xi)}{r^{1/2}} \tag{9.44}$$

最后根据上式可以得到

$$x = Br - kF(\xi)r^{1/2} + \xi \tag{9.45}$$

其中 $k = \frac{(\gamma+1)M^4}{\sqrt{2}B^{3/2}}$。方程(9.37)～(9.39)和(9.45)给出 $\xi/Br \ll 1$ 区域内声爆的非线性解。

根据弱激波的条件，取两个激波的平均值，可以得到确定 ξ 的条件为

$$\frac{1}{2}kF^2(\xi)\sqrt{r} = \int_0^{\xi} F(\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{9.46}$$

如果飞行物顶端的半角为 ε，截面积函数为 $S(x) = \pi\varepsilon^2 x^2$，$F$ 函数可表示为

$$F(\xi) = 2\varepsilon^2\sqrt{\xi} \tag{9.47}$$

并且从方程(9.46)可以得到

$$\sqrt{\xi} = \frac{3}{2}k\varepsilon^2\sqrt{r}$$

由此可以得到激波方程(9.45)的表达式为

$$x = Br - \frac{3}{4}k^2\varepsilon^4 r \tag{9.48}$$

激波波阵面的倾斜半角为

$$\mu_0 + \frac{3}{8}\frac{(\gamma+1)^2 M^8}{(M^2 - 1)^{3/2}}\varepsilon^4$$

以及激波强度

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{3}{2}\frac{\gamma(\gamma+1)M^8}{(M^2 - 1)}\varepsilon^4 \tag{9.49}$$

数值检验结果表明：对于飞行器顶端半角小于 10°、Mach 数在 1.1～3 之间，上面的激波强度公式都能给出很好的结果。

对远场情况，$r \gg 1$，激波强度公式变成

$$\frac{p - p_0}{p_0} \approx \frac{2^{1/4}\gamma(M^2 - 1)^{1/8}K}{r^{3/4}\sqrt{(\gamma+1)}} \tag{9.50}$$

其中 $K = \sqrt{\int_0^{\xi} F(a)\mathrm{d}a}$ 被称为形状因子。从上式可以看出，地面声压对 Mach 数的

依赖性较小，对高度的依赖性为 $r^{3/4}$。

(9.38)式表现了飞行器产生的声扰动在均匀大气中的柱形波传播。该方程是用近场条件得到的，但也可以得到一个很好的远场近似。(9.38)式的远场近似为(9.50)式，这个解包含有已知的结果，即，激波强度按 $r^{-3/4}$ 规律衰减，而不是按声波的 $r^{-1/2}$ 规律衰减。

(9.38)式适用于轴对称的物体。超音速局域支配理论引进了局部轴对称流动的概念。设 φ 为转动方位角，$F(x)$ 可被推广为 $F(x,\varphi)$。这是一个远场的结果，在半径大到使局部交叉流动效果可以忽略时有效。这对于声爆是合适的，因为通常只对其远场感兴趣。

方程(9.38)是从空气动力学的观点提出的，在与飞行物一起运动的坐标系中，将声爆视为波。这样做有利于推导出由飞行器产生的压力扰动。对于分析在真实大气中的声传播，可以在大气坐标系中将声爆的传播视为射线。对于稳定的飞行任何一种观点都适用，但对于非匀速飞行，使用物体随动坐标系就会面对非牛顿参照系的问题。采用声线的观点，有利于用几何声学方法计算模拟传播过程，并适于分析穿过有梯度的大气和来自移动声源的声波。

以声线的观点，方程(9.38)可改写为

$$\frac{p(\tau)-p_0}{p_0}=\frac{F_r(\tau)}{\sqrt{B_r}} \tag{9.51}$$

其中，$\tau=t-c_0/s$，t 为沿着声线的传播时间，s 为沿着声线的距离，c_0 为环境声速，这里的 F_r 和 B_r 是对(9.38)式中的 F 和 B 的修正。

9.2.2 声爆的聚焦

在线性声学中，向内凹的波阵面会形成聚焦现象。声线垂直于波阵面交叉形成一聚焦区域，它被限制在射线包络线所形成的焦散线内。利用射线声学可以得到声爆传向地面的轨迹，并且很容易预计射线会出现聚焦现象。但是根据激波理论，声爆聚焦不能像光学透镜那样形成一条焦散线。这是因为，当声强由于会聚作用而增加时，声速加快，其结果使声线分离从而无法形成聚焦。非线性效应导致聚焦的最大振幅为有限的，这与实验观测到的结果一致。只有波的不同分量才能会聚于一点，但在焦散线上的衍射降低了聚焦强度。其振幅除了受到非线性效应的影响外还有衍射的影响。衍射影响依赖于频率，对低频的影响超过对高频的影响。

远离焦散线的区域也是令人感兴趣的。在焦散线上方的区域，声射线出现交叉。这里有两种声爆：没有经过焦散线的、正常的未聚焦声爆和经过焦散线的、聚焦后的声爆。聚焦后的声爆会大幅度地衰减，并且呈现 U 波的外形。聚焦后的声爆可用 Hilbert 变换来近似处理。在焦散线的影区一侧将会出现衰减波。

9.2.3　激波的厚度

激波厚度是一个很重要的声爆参数，因为它直接关系到人们在户外听到的声爆的响度，进而影响人们对超音速飞行所产生噪声的接受程度。

声爆基础理论使用弱激波理论，即未考虑激波的结构，而只是将其处理为一个很薄的间断层。但实验结果显示声爆的激波结构比按经典吸收机制所预期的要厚得多。这种情况的发生，部分是由于大气湍流引起的，部分是由于分子弛豫造成的。激波结构是分子弛豫和非线性陡峭化之间相互作用的结果，这一现象已被很好地理解。分子弛豫过程对大气中激波产生时间的影响早已被人们所熟知了。

有两种方法可以计算激波结构。第一种方法称为 Pestorius-Anderson 算法[263]，即在频率域内考虑弛豫效果、而在时间域内采用 Whitham 方法计算非线性陡峭化。第二种方法[264]是从 Burgers 方程出发进行分析，而弛豫效果和非线性陡峭化都是在时间域内计算。两种计算方法都已被编成专用程序，并被用来进行计算以检验相应的理论。

有时，激波厚度用声压上升时间来描述，Plotkin 利用飞行实验数据计算出激波产生的时间为 1ms-psf/Δp，其中 Δp 为激波的超压[265]。

9.2.4　声爆模拟程序[266]

最早的计算机模拟程序是 1963 年由 Friedman 等[267]编写的，在 60 年代的波音 2707 SST 计划中被广泛应用于声爆分析。这个程序的大多数细节是正确的，但是 B_r的声线管面积的公式表达上有一些误差。

1972 年 Thomas 发表了另一个模拟程序[268]，它可以直接输入从风洞实验得到的声压 Δp。对于形体简单，利用从近场风洞实验得到的数据进行数值模拟得到了很好的结果。但是，就像前面提到的，近场的结果不能反映声爆在传播过程中产生的变形。Thomas 的程序完整地应用了声爆的基础理论，对于在有风的任意水平分层大气中任意非匀速飞行的飞行器都适用。但这样的程序太复杂，并且需要使用大量的计算机时。

Carlson 发展了一种实用化的程序[269]来计算在标准大气中稳定飞行产生的 N 波声爆。他提出的这种程序在方程形式上类似于(9.51)式的远场公式，但是含有几个与传播穿过稳定无风大气有关的因子。这些因子包括：由于声线路径的折射对振幅和持续时间的影响、由于声学阻抗梯度对振幅和持续时间的影响和由于地面反射导致的增幅。传播的分离轨迹被包括在内，所以可用来计算穿过一定宽度的地面衰减层的声爆。F 函数的积分由一个与飞行器尺寸成比例的规范化形状因子来表示。对于多种飞行器均提出了形状因子的图表。Carlson 方法的价值不仅在于可以快速计算稳定飞行所产生的 N 波声爆，还在于它明确显示了参数的定

标效果，例如 Mach 数和飞行器长度。形状因子可被用来产生有效的 F 函数，以在完全射线寻迹程序中使用。

另一种简化的方法由 Plotkin[265] 所发展，适用于无风大气中的非匀速飞行。这个程序，对于一个给定的大气，声线的外形只依赖于飞行高度和声线最初的垂直角度。声线管的面积可由声线的形状和声线形状相对于运输器飞行参数的微商来计算。一旦这些量被计算出来，一个非匀速飞行器所产生声爆的计算就变成了一个代数问题，计算所需的时间比完全射线寻迹程序快两个数量级。

9.3 对大气湍流中声波的晚近研究[258]

湍流是流体中一种非线性现象。在许多情况下，大气中的气体运动都具有湍流的特征。波动在湍流介质中的传播和散射的研究结果是现代探测大气环境遥感技术的重要基础。如在第 8 章中所指出过的，由于声速强烈依赖于大气温度和风速，声波是一种用来在地面遥感探测大气湍流的特别有吸引力的工具。

声波在大气湍流中的传播和散射一方面与电磁波在大气中的相应行为相类似，另一方面又与声波在海洋中的相应行为相类似。因此，很多声波在大气中传播的问题都可用随机运动介质中波传播的现有理论得到解决。

自 20 世纪后半叶以来，关于声波在湍流中传播的主要理论成果都是在局部均匀和局部各向同性的假定下得到的。有关的讨论详见第 4 章的第 4.3 节、4.4 节。可是大气中始终存在着中尺度的准有序不均匀性，例如热对流。在单点测量气象参数时，这些不均匀性表现为小尺度扰动的间歇性和各向异性。在这种情况下，平均湍流参数，如温度和速度结构参数 C_T^2 和 C_v^2（参见第 1 章第 1.2.3 节）能量耗散速率 ε 和其他参数都有明显变化，并且很难被认为是给定气流的常数参量。从 20 世纪 70 年代开始，这些真实大气湍流的不同性质，包括：湍流的各向异性、湍流的间歇、准有序的中尺度不均匀性等对声波信号参数的影响变得明显起来。利用声雷达可以探测到热对流的存在。早在 1968，McAllister 在声探测大气的研究中就得到了热对流的数据[221]。但是，目前中尺度大气结构的存在很少被考虑进声波的传播理论中。实验大气物理学家将温度场的风速旋涡的和大气波动的准有序不均匀性均称为“相干结构”。这些相干结构对声波的传播有明显影响。当声脉冲和次声波传播时，相干结构的影响尤其值得注意。由于对湍流本身的研究就是一个非线性难题，湍流的数学描述就是非常复杂的，再加上声传播的问题，就使得研究更加复杂化。有关湍流中声波的晚近研究中主要采用的多为实验方法，数值方法只被用来研究一些理想化的模型。下面介绍一些主要的研究结果。

9.3.1　间歇性的影响

在大气实验中注意到了一些现象。如小规模湍流间歇性导致了温度和速度结构参数C_T^2和C_V^2的明显变化；散射信号的概率密度函数(pdf)与对数正态函数不一致；回波信号变强的概率增加；由于湍流间歇性导致的散射强度的增加等等。Petenko和Shurygin[270]通过实验研究了对流的大气边界层(ABL)中声信号反向散射的pdf。结果显示，在对流相干结构出现时，回波信号强度的pdf可以被表示为两个对数正态的pdf之和。这些pdf的参数取决于散射体积在下层表面之上的高度和ABL不稳定的程度。图71展示了一个反向散射声信号的实验柱状图。这一结果很有可能部分地解释了ABL不同层中用声雷达测量C_T^2和现场测量C_T^2结果之间的不一致性。目前对这种不一致性的解释一般认为是由湍流所导致的声波的插入损失造成的。但至今仍然没有理论可以对真实的ABL回波信号的pdf参量进行估值。困难在于不仅要考虑间歇性效果还要考虑准周期不规则性的发生。

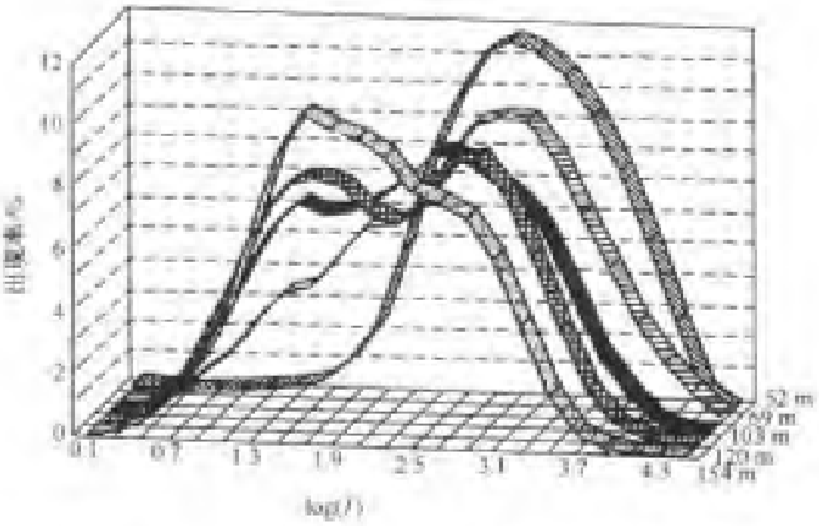


图71　从52m到154m高度间声信号被反向散射的概率密度实验柱状图

9.3.2　小规模湍流各向异性的影响

实验证明ABL中的小规模湍流是各向异性的。这种各向异性一定会通过对铅直发射探测波束的反向散射偏离铅直方向的灵敏性表现出来。这方面的灵敏性最早由Neff(1975)观测到[271]。如果湍流的不均匀性是在水平面上，这种现象可能会导致在铅直探测时反向散射强度的增加。如果各向异性结构是倾斜的，回波的强度比由各向同性的不均匀性引起的回波强度要低。Singal等(1997)用声雷达研究了各向异性的影响[272]。这些测量的结果在图72中给出。反向散射各向异性

系数被定义为

$$K_\alpha = I_{vert}/I(\alpha)$$

其中 I_{vert} 为铅直方向的反向散射强度，而 α 为波束偏离铅直方向的角度。

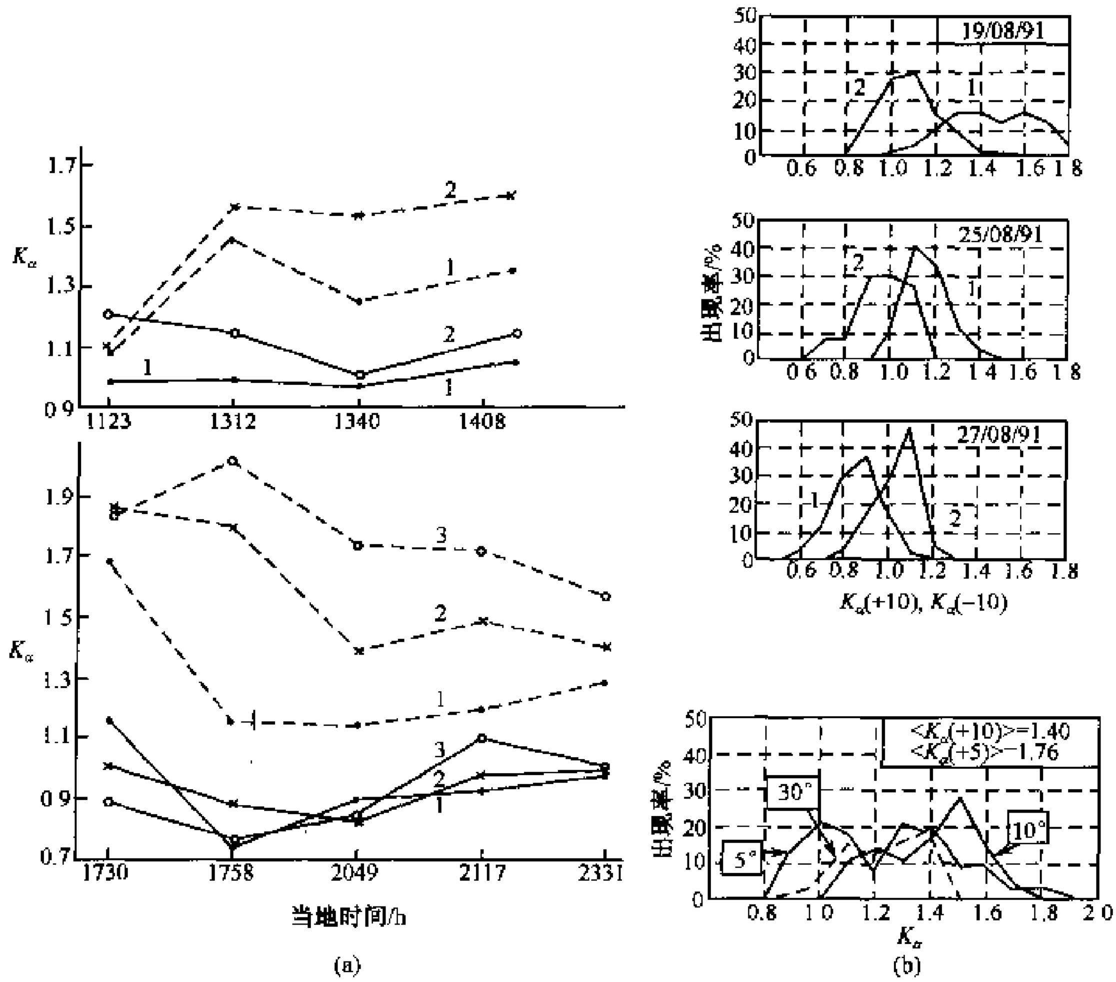


图 72　小尺度湍流的各向异性

(a) 不同高度下各向异性系数 K_α 的时间序列；上图对应于对流条件下而图对应于逆温条件，实线：$\alpha=5°$，虚线：$\alpha=10°$；线旁数字代表不同高度范围：1—50～100m；2—100～150m；3—150～200m。(b) 从上到下依次为：K_α 在逆温条件下的柱状图，K_α 同时在相反角度下的测量：1—$\alpha=10°$；2—$\alpha=-10°$，四夜测量的平均值；点线：$\alpha=5°$；实线：$\alpha=10°$；虚线：从 Neff (1975) 的数据得来，在较高的倒置层 $\alpha=30°$

从图 72 中可以看到，各向异性系数在倒置条件下的值大于在对流条件下的值，并且随着散射体积在下层表面上高度的增加而增大。从图 72(b) 中可以看出 K_α 也取决于波束的方位角。

9.3.3　准周期相干结构对回波信号低频功率谱的影响

Petenko 和 Bezverkhnii(1999) 实验研究了 ABL 相干结构对声信号低频频谱

特性的影响[273]。他们利用对流层对 $10^{-4}\sim10^{-2}$ Hz 频率范围内次声波的反射进行了研究。图 73 给出一个回波信号强度的低频功率谱和一个铅直方向声雷达频率中的 Doppler 频移的例子。梳状形式的低频频谱使人想到散射湍流结构是准周期的。一典型极值对应于 6～9min 的周期，这在整个频谱中都可以看到。此前其他人也得到过同样的观测周期，这个周期与对流层波导的 Väisälä-Brunt 频率的特性周期接近，因此他们提出对流层的浮力波影响着 ABL 中声波的散射特性。

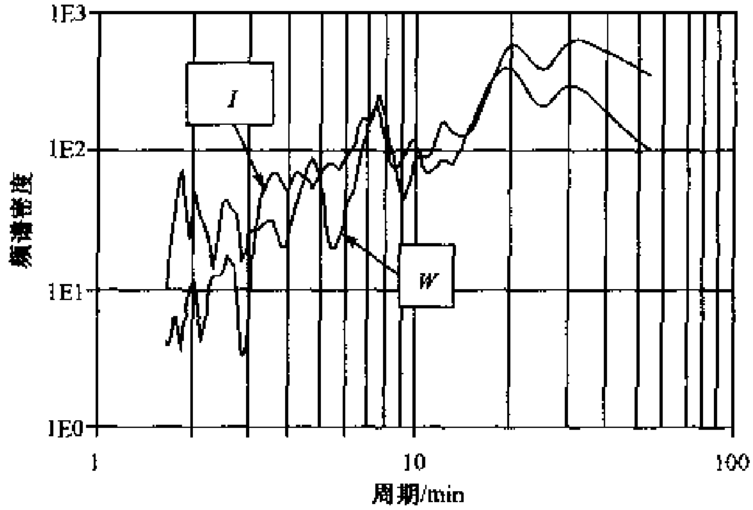


图 73 回声信号强度的功率谱和 Dopper 雷达所测铅直风与周期关系的一个例子
I：整个高度探声范围内反向散射强度的积分值；W：整个高度探声范围内铅直风速的平均值

9.3.4 相干结构对脉冲在 ABL 中传播的影响

中尺度风速不均匀性对声脉冲和次声波在 ABL 中传播的影响已经被很多人研究过[274]。Chunchuzov 等人进行了爆炸声在稳定分层的 ABL 中传播的实验研究[275]，他们测量了声脉冲的持续时间和传播时间。图 74 给出从一个爆炸声源得到的声信号的波形：其中图 74a 是从声源附近检测到的信号；图 74b 是从一个距离声源 2.7km 的三角形天线收到的信号，从信号中可识别出以不同路径传播过来的声波；图 74c 显示了声信号的传播时间和风速随时间的低频波动，这两个时间序列的形状看起来很相似，这就证明了对稳定分层的 ABL 的声学层析成像的可行性。利用这个方法，使人能在对浮力波特征波数缺乏了解的条件下来估测风速和温度的三维空间谱。另外，在这些实验中还在声波的影区中检测到信号，这显然是由可与声波波长相比拟的中尺度不均匀性引起的脉冲散射所造成的结果。

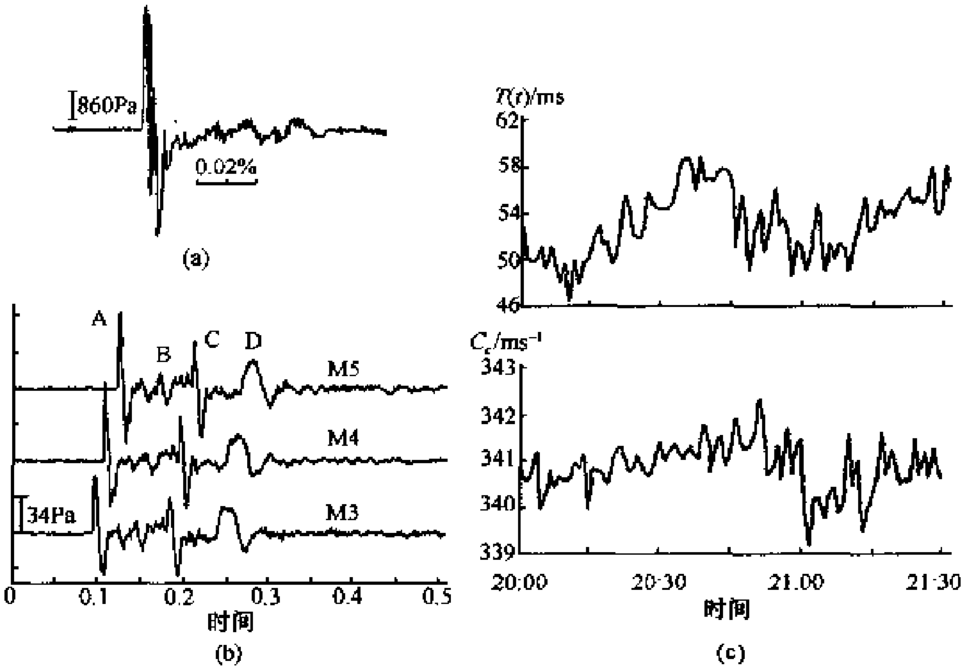


图 74 低层大气波导中声脉冲的时间波动

声压和时间的范围尺度由图旁的铅直和水平线段表示。(a) 源附近接受到的信号;(b)由三角天线(M3, M4, M5)接收到的相同信号(r= 2.7km);(c)声雷达测量到的有效声速(下图)和传播时间(上图)的时间序列变化

9.3.5 中层大气中各向异性结构所引起的声散射

Tsuda(1986) 在用雷达观测时,首次发现了同温层中的长寿命、中尺度不均匀性[276]。Bush 等(1997)在对剧烈爆炸所产生声信号的长距离传播的研究中观测到同样的结构[277]。图 75 中示出同温层和中层中折射信号的准周期波动。这些波动的特性在十几分钟内保持无变化。Kulichkov(1998)在研究同温层铅直结构中使用的声学层析成像法显示出信号除了铅直各向异性之外还有水平方位的各向异性[278]。

9.3.6 湍流对非线性波的影响

由于声波的振动速度随着大气密度的降低而增加,声波传入大气高层的过程本质上是非线性的;非线性效应是造成声脉冲形状改变和持续时间增加的主要原因。

大气湍流会影响声爆的传播。在有湍流出现的条件下,声爆以两种方式发生形变:一种是,每一激波后而都会产生一粗糙的细微结构;另一种是使激波变厚。穿过湍流时会影响激波的非线性形变,并且主要是改变其峰值压力和厚度。实验

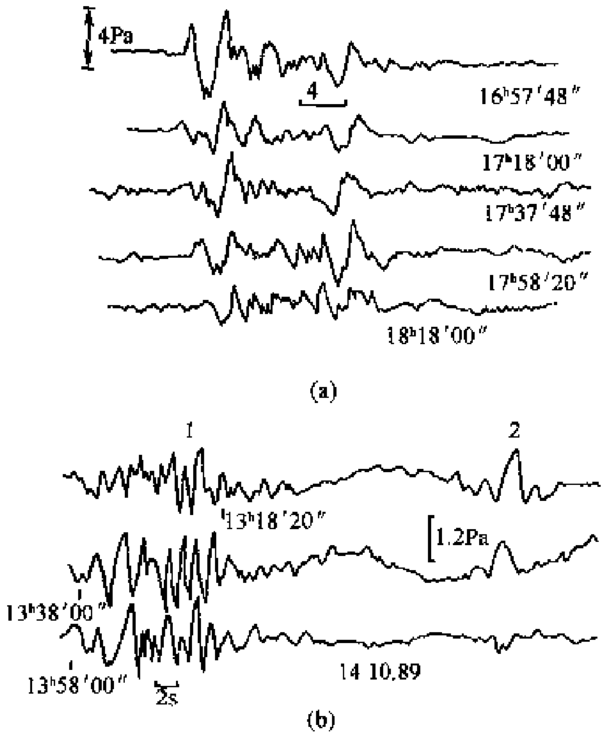


图 75　在距离源头 $r=300$km 处接收到的中层大气中各向异性的爆炸源所产生的声反射和散射

(a)同温层中的散射：1990 年 8 月 11 日在声影区中接收到的爆炸装置(当量 70t、间隔 20min)信号；(b)同温层(1)和中层(2)中的反射：1989 年 10 月 14 日在爆炸装置(当量 40t、间隔 20min)可听阈接收到的信号

和数值计算结果都表明：声爆的非线性形变在大气湍流存在时比不存在时弱。平均起来，在湍流存在时峰值压力减少而厚度增加。峰值压力和厚度的分布是不均匀的，随机速度场的影响要大于随机温度场的影响，这与实际观测的结果一致。但另一方面，大气湍流有可能导致声爆波前的聚焦现象。散焦面会增加峰值压力和厚度的变化。

图 76(a)展示了一理论模拟的爆炸信号向高层大气传播时的形变[258]；图 76(b)给出从两个不同强度和持续时间的爆炸得到的信号纪录；图 76(c)表出从这两个爆炸发出的声信号在同温层和热电离层中的折射，并且在距离声源 200～240km 处被记录下来。正如在图 76(a)中所看到的，没有湍流影响时，最初的 N 形波变形为 U 形波。然而，这些波的形状由于湍流而明显地变形了。值得注意的是，由于非线性效应，尽管这两个爆炸有本质不同，图 76(b)中的信号都有着几乎相同的持续时间和振幅。

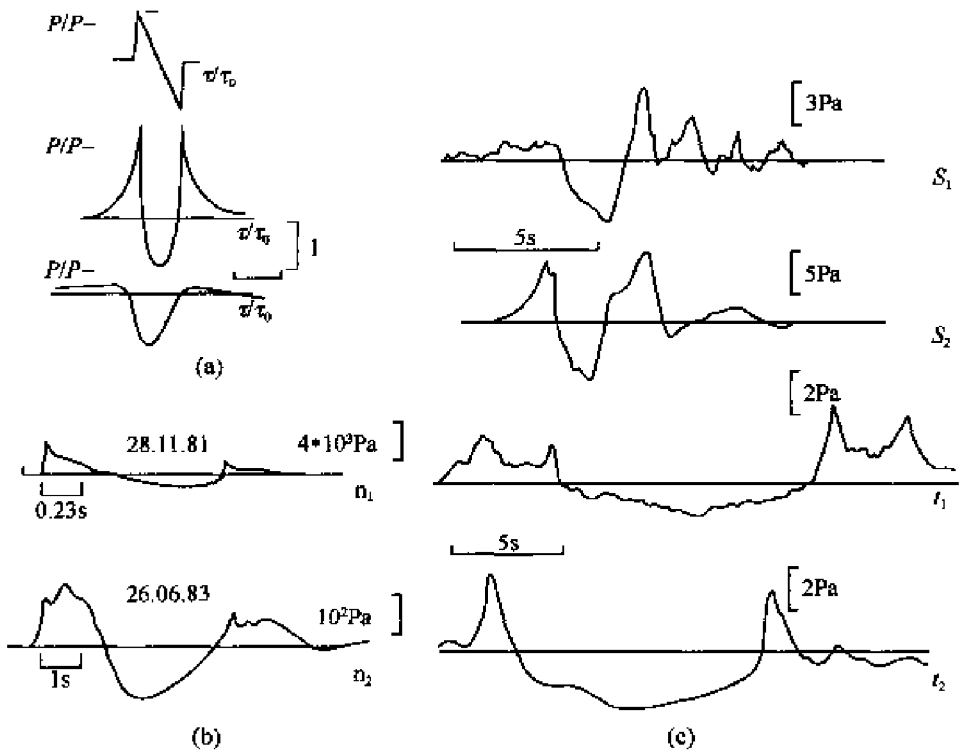


图 76 非线性和中尺度湍流在声传播中的联合效果

(a)初始 N 波(上图),由上层大气反射的声脉冲由 N 波非线性变化为 U 波:全反射(中图);部分反射(下图)。信号用相对压力 p/p_- 坐标和相对时间 τ/τ_0 坐标表示。[p_-为脉冲负位相的幅值;$\tau=t-r/c$,r 为距离,$c(r)$为声波群速度];(b)在源附近接收到的信号:n_1 来源于地面爆(1981 年 11 月 28 日、当量 260t、距离源头 2km);n_2 来源于地下爆(1983 年 6 月 26 日,当量 2000t、距离 4km);(c)同样的两个爆炸源的信号在 240km 处接收。S_1 和 S_2 是同温层的反射,t_1 和 t_2 是热电离层的反射

9.4 大气孤波

9.4.1 大气孤波的基本方程

前面介绍过由于非线性作用简谐波在传播过程中会逐渐压缩变成锯齿波。但有一类非线性波却可以在长距离传播中保持其波形,这就是孤波。英国科学家 Russell 早在 1844 年就观察到:当运河中行驶的船只突然停止时船前会形成一个可以传播很远的孤立水波,后来他在英国科学大会上报告了这一发现。1895 年,Korteweg 和 de Vries 推导出描述这个水波的非线性方程,以后被称为 KdV 方程。在数学上,孤波是非线性偏微分方程在局部存在的稳定解。除了 KdV 方程,还有其他非线性方程,例如,Sine-Gordon 方程也可能出现孤波解。大气中的孤波主要由 KdV 方程描述。

孤波可以长距离传播的原因是由于频散和非线性相互作用的结果。本章第 1.3 节中的分析表明，一个初始的简谐波在非线性条件下传播时可产生高阶谐波。如果有频散效应存在，频率不同的各阶谐波的传播速度各不相同，因此频散效应有使波形扩散的倾向而非线性效应则有使波形压缩的倾向。这两种倾向性相互抵消而使孤波保持着稳定的波形传播很远距离。

最初的 KdV 方程描述的是水表面的孤波。在大气物理学研究中，KdV 方程被推广用来研究分层大气界面上的非线性内波[279]。下面就来推导这一推广的 KdV 方程。基本模型是：在刚性的地面上，上、下分布着两种不同性质的流体，孤波存在于这两种流体的水平分界面上。目前，大气孤波采用的模型属于深水理论模型，它要求波长远小于上层流体的厚度。

这是一个二维问题，令 x 轴沿着界面而 y 轴垂直于界面；速度的水平和铅直分量分别为 u 和 v。流体力学的支配方程由下式给出

$$\partial_t\rho + u\partial_x\rho + v\partial_y\rho = 0 \tag{9.52}$$

$$\partial_\xi u_1 + \partial_y v_1 = 0 \tag{9.53}$$

$$\rho(\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y v) = -\partial_x p \tag{9.54}$$

$$\rho(\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v) = -\partial_y p - \rho g \tag{9.55}$$

推导分三步进行：首先考虑下层流体的解，接着求解上层流体的运动，最后由上、下层的解在分界面上满足连续性条件而给出界面的波动。下层流体被限制在区间 $0 \leqslant y \leqslant h_0$ 内。采用如下的伴随坐标系

$$\xi = \varepsilon(x - c_0 t), \tau = \varepsilon^2 t, y = y$$

其中，ε 是一个小量。将速度、压力和密度展开，有

$$u = \varepsilon^n u_n(\xi, y, \tau), v = \varepsilon^{n+1} v_n(\xi, y, \tau)$$

$$p = p_0(y) + \varepsilon^n p_n(\xi, y, \tau), \rho = \rho_0(y) + \varepsilon^n \rho_n(\xi, y, \tau)$$

将展开式代入方程组(9.52～9.55)中，写出 ε 的最低阶方程：

$$\left.\begin{aligned} -c_0\partial_\xi\rho_1 + v_1\partial_y^3\rho_0 &= 0 \\ \partial_\xi u_1 + \partial_y v_1 &= 0 \\ c_0\rho_0\partial_\xi u_1 &= \partial_\xi p_1 \\ \partial_y p_1 + \rho_1 g &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.56}$$

消去 u_1, p_1, ρ_1 后得到下式

$$\partial_y(\rho_0\partial_y v_1) - \frac{g}{c_0^2}v_1 \mathrm{d}_y\rho_0 = 0 \tag{9.57}$$

对速度 v_1 作变换

$$v_1 = -\phi(y)\partial_\xi f(\xi, \tau) \tag{9.58}$$

方程(9.57)就变为

$$\mathrm{d}_y(\rho_0\partial_y\phi) - \frac{g}{c_0^2}\phi\,\mathrm{d}_y\rho_0 = 0 \tag{9.59}$$

取线性近似，其他各量可表示为

$$u_1 = f(\xi,\tau)\mathrm{d}_y\phi(y)$$
$$p_1 = -c_0\rho_0 f(\xi,\tau)\mathrm{d}_y\phi(y)$$
$$\rho_1 = -\frac{1}{c_0}\rho_0\phi(y)\mathrm{d}_y\rho_0$$

取 $O(\varepsilon^2)$ 阶的方程

$$-c_0\partial_\xi\rho_2 + v_2\partial_y^3\rho_0 = G_1$$
$$\partial_\xi u_2 + \partial_y v_2 = 0$$
$$-c_0\rho_0\partial_\xi u_2 + \partial_\xi p_2 = G_2$$
$$\partial_y p_2 + \rho_2 g = 0$$

其中的非齐次项为

$$G_1 = \frac{1}{c_0}\rho_0'\phi\partial_\tau f + \frac{1}{c_0}[\rho_0'\phi\phi' - \phi(\rho_0'\phi)']f\partial_\xi f$$
$$G_2 = -\rho_0\phi'\partial_\tau f - [\rho_0(\phi')^2 - \rho_0\phi\phi'' + \rho_0'\phi\phi']f\partial_\xi f$$

消去 u_2, p_2, ρ_2，得到下式

$$\partial_y(\rho_0\partial_y v_2) - \frac{g}{c_0^2}v_2\mathrm{d}_y\rho_0 = J(f,\phi) \tag{9.60}$$

并且 $J = -\frac{2}{c_0}(\rho_0\phi')'\partial_\tau f - \frac{1}{c_0}\{3[\rho_0(\phi')^2]' - 2\rho_0\phi'\phi'' - 2[\rho_0\phi\phi']'\}f\partial_\xi f$

方程(9.60)有非奇异解的条件要求

$$\int_0^{h_0}\phi\left[\partial_y(\rho_0\partial_y v_2) - \frac{g}{c_0^2}v_2\mathrm{d}_y\rho_0\right]\mathrm{d}y = \int_0^{h_0}\phi J(f,\phi)\mathrm{d}y \tag{9.61}$$

底部的边界条件要求

$$\text{在 } y = 0 \text{ 处 } \phi = 0 \text{ 和 } v_2 = 0 \tag{9.62}$$

利用条件(9.62)，方程(9.61)变成

$$c_0\rho_0[v_2(h_0)\mathrm{d}_y\phi(h_0) - \phi(h_0)\partial_y v_2(h_0)]$$
$$= 2\left[\int_0^{h_0}(\rho_0\phi')\phi'\mathrm{d}y\right]\partial_\tau f + \left\{\int_0^{h_0}[3(\rho_0\phi'^2)' - 2\rho_0\phi'\phi'' - 2(\rho_0\phi'\phi'')'\phi]\mathrm{d}y\right\}f\partial_\xi f \tag{9.63}$$

现考虑上层流体。采用如下的伴随坐标系

$$X = \varepsilon(x - c_0 t),\quad \tau = \varepsilon^2 t,\quad y = y$$

在区间 $y \geqslant h_0$，方程组(9.52)～(9.55)可表为

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon\partial_y\rho - c_0 v\partial_x\rho + u\partial_x\rho + v\partial_y\rho = 0\\
&\partial_\xi u + \partial_y v = 0\\
&\varepsilon^2\partial_y u - c_0 v\partial_x u + u\partial_x u + v\partial_y u = -\frac{1}{\rho_0}\partial_x p\\
&\varepsilon^2\partial_y v - c_0\partial_x v + u\partial_x v + v\partial_y v = -\frac{1}{\rho_0}\partial_x p - g
\end{aligned}\right\} \tag{9.64}$$

把质点速度、压力和密度展开到 $O(\varepsilon^2)$

$$u=\varepsilon^2 U(\xi,y,\tau),v=\varepsilon^2 V(\xi,y,\tau)$$

$$p=p_0(y)+\varepsilon^2 P(\xi,y,\tau),\rho=\rho_0(y)+\varepsilon^4 R(\xi,y,\tau)$$

将展开式代入方程组(9.64)，消去 U,P,R，得到 $O(\varepsilon^3)$阶的 Laplace 方程

$$(\partial_x^2+\partial_y^2)V=0$$

边界条件是

$$V(x,y,\tau,\varepsilon)\to 0,\text{当 } y\to+\infty$$

$$V(x,y,\tau,\varepsilon)=V_0(x,\tau,\varepsilon),\text{当 } y=h_0$$

Laplace 方程的解为

$$V(x,y,\tau,\varepsilon)=\frac{1}{\pi}T\int_{-\infty}^{\infty}V_0(\chi,\tau,\varepsilon)\frac{y-h_0}{(y+h_0)^2+(x-\chi)^2}\mathrm{d}\chi$$

T 表示积分的主值。在 $y=h_0$，有

$$\partial_y V(x,y,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\pi}\partial_x T\int_{-\infty}^{\infty}V_0(\chi,\tau,\varepsilon)\frac{1}{x-\chi}\mathrm{d}\chi$$

最后，在分界面上，速度的铅直分量和它们的一阶微商分别连续

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon^2 v_1(\xi,h_0,\tau)+\varepsilon^3 v_2(\xi,h_0,\tau)&=\varepsilon^2 V(\xi,h_0,\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon^2\partial_y v_1(\xi,h_0,\tau)+\varepsilon^3\partial_y v_2(\xi,h_0,\tau)&=\varepsilon^2\partial_y V(\xi,h_0,\tau,\varepsilon)\end{aligned}\right\}\tag{9.65}$$

不失一般性，可取

$$V_0(\xi,\tau,\varepsilon)=-\partial_\xi f$$

解方程组(9.65)得到

$$\left.\begin{aligned}&\phi(h)=0, &&v_2(\xi,h,\tau)=0\\ &\mathrm{d}_y\phi(h)=0 &&\partial_y v_2(1)=T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\zeta,\tau)}{\xi-\zeta}\mathrm{d}\zeta\end{aligned}\right\}\tag{9.66}$$

用方程(9.59)以及条件(9.63)式和(9.66)式可以解出 ϕ，最后得到 f 的方程

$$\partial_\tau f+\alpha f\partial_\xi f-\beta\partial_\xi^2 H(f)=0\tag{9.67}$$

其中

$$\alpha=\left\{\frac{3}{2}\int_0^{h_0}\rho_0(y)\phi'^3\mathrm{d}y\right\}\Big/\left\{\int_0^{h_0}\rho_0(y)\phi'^2\mathrm{d}y\right\},\beta=\rho_0\Big/\left\{\frac{2}{c_0}\int_0^{h_0}\rho_0(y)\phi'^2\mathrm{d}y\right\}$$

H 为 Hilbert 变换

$$H\{f(\xi)\}=\frac{1}{\pi}T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\xi-\zeta}\mathrm{d}\zeta$$

方程(9.67)就是推广的 KdV 方程。假定 f 是 $\eta=\xi-\lambda\tau$ 的单值函数，可以得到如下的解

$$f_s(\eta)=\frac{a\delta^2}{\eta^2+\delta^2}\tag{9.68}$$

其中 $\lambda=\frac{a\alpha}{4}$，$|\delta|=\frac{4\beta}{a\alpha}$，方程(9.68)就是一个可以描述大气孤波的解。

9.4.2 对大气孤波的探测

目前，多数在大气边界层中的孤波都是在美国和澳大利亚观测到的。例如春天时在澳大利亚北部可以看到著名的“喇叭花”现象[280]，其形式是长度常常超过几百 km 的卷云；这就是当低层大气处于稳定的潮湿条件下所显示出来的孤波。这些波的传播速度据估测通常超过 $10ms^{-1}$，具有几百 m 的振幅和几 km 的波长。Doviak 等(1991)在俄克拉荷马州的中心区域观测到了一个由雷暴产生的振幅为 400m、波长为 2km 的孤波，从它的源头在厚度为 500 m 的逆温层中以 $13ms^{-1}$ 的速度传播了大约 100 km[281]。Rees 和 Rottman (1994)分析了几起从南极得到的孤波，其相速度范围为 2 到 $10ms^{-1}$，从陆地传向逐渐倾斜的沿海的南极冰架上空[282]。目前已经知道：波长在 200m 左右、振幅在 40m 以下的孤波只能在风速较低时发生。

一般来说，孤波的振幅是由在地面或更高层大气中测得的气压和温度的波动得到的。但是要从单点传感器的测量中估测出波的振幅是比较困难的。因此，人们期望地基遥感测量系统，例如风剖面仪、RASS、激光雷达和 Doppler 声雷达就能够提供波在时间上和高度上演化现象的图像，其中 Doppler 声雷达被认为是一种有用的边界层孤波测量工具。声雷达数据可以显示声回波强度随时间和高度变化的图像，这些数据提供了孤波在 1 km 以下的高度传播时直接的振幅信息。目前大多数声雷达可以在 1km 左右的高度良好工作。孤波的声雷达特征信号系由声波在周围空气和波内部回流空气分界面上的散射得到。在声雷达数据中，从回波的最大高度可以测出孤波的振幅。Christie 等 (1981) 在澳大利亚 Warramunga 用收发合置的声雷达探测到两起孤波[283]。在每一起探测中孤波的数量及其振幅都可从声雷达的记录上直接测得。在一次探测中，一共识别出 7 个孤波。振幅在 200～400m 之间，波长超过 1km。将最大探测范围为 100 m 的高分辨率声雷达和一台常规声雷达一起使用，Cheung 和 Little(1990)在美国 Boulder 大气观测站观测了五起夜间在浅层稳定边界层中传播的孤波，其振幅超过 500 m[284]。此外，人造卫星和其他的空间成像方法在探测孤波方面起了辅助作用。

图 77 所示的是 Rao 和 Fiocco 等关于罗马市区上空边界层中传播的孤波的一个典型记录，这个孤波可能是由海洋风产生的[285]。声雷达数据出现了没有回声的区域，如 S_1 S_2所示，这表明：孤波中存在回流气流。图中还显示出铅直速度随着高度单调地增加这一孤波的特征。他们测得的振幅和波长比与理论推导结果也吻合得较好。在超过一年的持续测量中他们只观测到三次孤波。这一事实表明孤波在市区上空边界层中可能并非普遍存在，也可能是其传播条件很容易被破坏掉。

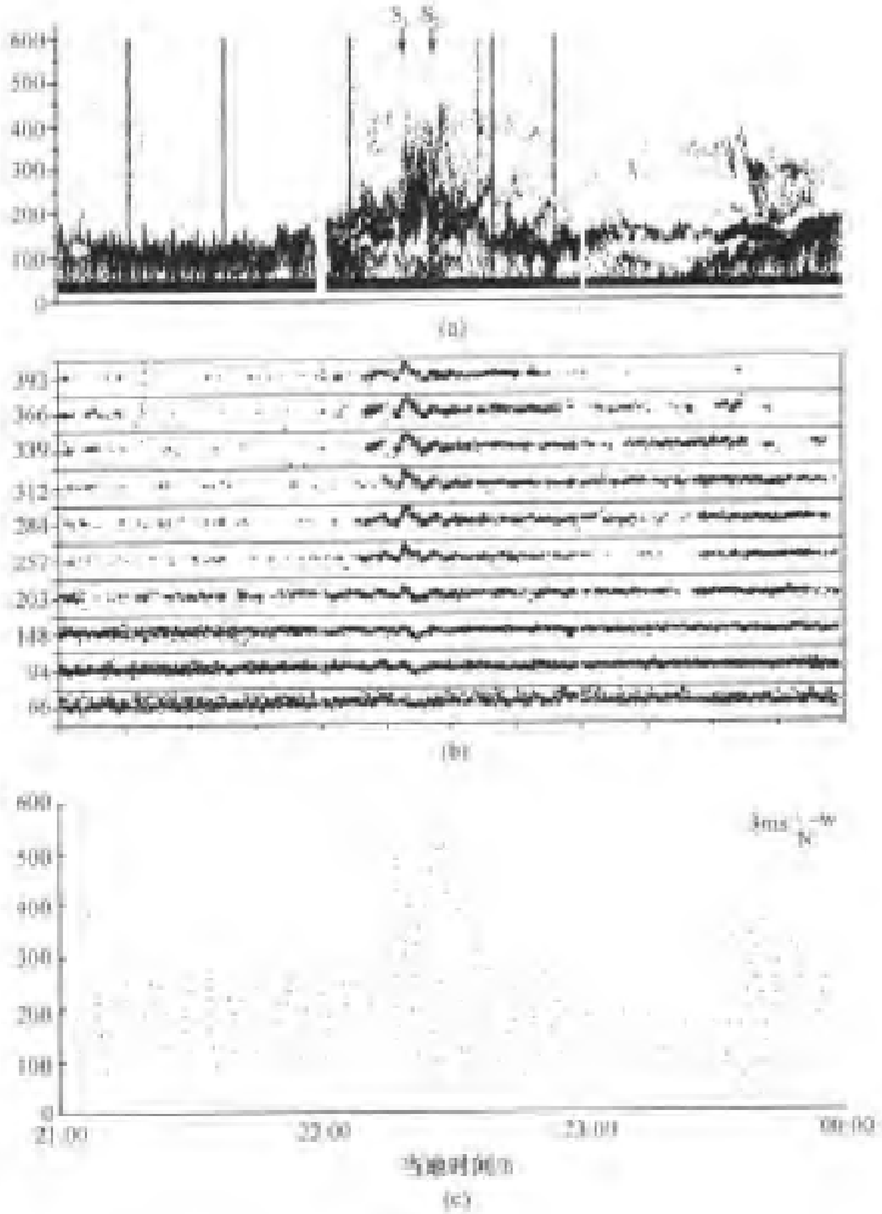


图 77
(a)声雷达数据;(b)在十个高度上的垂直风速;(c)水平风场矢量

第 10 章　大气中的声源

10.1　基本声源

大气中的基本声源可以归结为三类理想化声源:单极子、偶极子和四极子。

10.1.1　单极子源

单极子源就是一个四周均匀胀缩振动着的球面源,在半径为 a 的球源表面上,径向振动速度为

$$u = U\exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{10.1}$$

其中振幅 U 为一常数。球对称的声源必然产生球面波,满足波动方程的质点速度势为

$$\phi = \frac{A}{r}\exp(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}kr) \tag{10.2}$$

利用边界条件可以得到:

$$A = \frac{a^2 U}{1 + \mathrm{i}ka}\exp(\mathrm{i}ka)$$

声压和质点振动速度可以利用第 2 章的公式得到。满足声波方程和边界的声压解为

$$p = \rho\partial_t\phi = \frac{\mathrm{i}a^2\omega\rho U}{r(1 + \mathrm{i}ka)}\exp(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}kr + \mathrm{i}ka) \tag{10.3}$$

单极子源产生的声压振幅与传播距离成反比关系。

下面看一下辐射能量。声源的辐射能力由辐射阻抗来表示。球表面所受到的声场力为

$$F = -Sp = \rho c\,\frac{(ka)^2 + \mathrm{i}ka}{1 + (ka)^2}Su = Z_r u \tag{10.4}$$

其中 S 为球的表面积。上式表明力和振动速度成正比,比例系数 Z_r就是辐射阻抗

$$Z_r = \frac{F}{u} = \rho c\,\frac{(ka)^2 + \mathrm{i}ka}{1 + (ka)^2}S \tag{10.5}$$

将实部(辐射阻 R_r)和虚部(辐射抗 X_r)分开:

$$Z_r = \frac{(ka)^2\rho c}{1 + (ka)^2}S + \frac{\mathrm{i}ka\rho c}{1 + (ka)^2}S = R_r + \mathrm{i}X_r \tag{10.5'}$$

将 F 另表示为

$$F = -R_r u - M_r \dot{u} \tag{10.4'}$$

其中 $M_r = \frac{X_r}{\omega}$ 被称作辐射质量。由于声场的存在，球表面受到一阻尼力和一惯性力作用。在球表面上求球面声源的平均辐射功率

$$\overline{w} = \frac{S}{2}\mathrm{Re}[pv^*] = \mathrm{Re}\left[\frac{ka\rho cU^2 S}{2(\mathrm{i}-ka)}\right] = \frac{1}{2}R_r U^2 \tag{10.6}$$

其中 $v^* = U\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 为质点速度的复共轭。可以看到，声源振动速度给定时，平均辐射功率只依赖于辐射阻。当波长远大于声源半径时，$ka \ll 1$，辐射阻近似为

$$R_r = (ka)^2 \rho c S \tag{10.7a}$$

从上式可以看到，声源的面积一定时，低频的辐射声压较小。当波长远小于声源半径时，$ka \gg 1$。

$$R_r = \rho c S \tag{10.7b}$$

高频时辐射阻不依赖于频率，并且声源的面积越大辐射的声压越大。

10.1.2　偶极子源

两个频率、振幅相同而相位相反的单极子构成一个声偶极子。考虑这样一个声偶极子：相距为 d 的两个单极子，其连线的中点为原点，观察点到原点的距离为 r，观测点到原点的连线与两源连线的夹角为 θ。如果观测点到两源的距离不等，就会有声程差

$$\Delta = \frac{d\cos\theta}{2}$$

根据线性叠加原理，观察点处的声压是两个单极子源所产生声压之叠加。大气声学中往往只考虑距声源较远处的声场，当观察点 $r \gg d$ 时，在叠加时可忽略由声程差造成的振幅差别，但不能忽略由声程差产生的相位差别。叠加后的声场的质点速度势为

$$\phi = \frac{\mathrm{i}2A\sin(k\Delta)}{r}\exp(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}kr) \tag{10.8}$$

当波长远大于两源的间距，即 $kd \ll 1$ 时，速度势可以写成

$$\phi = \frac{Akd\,\mathrm{i}}{r}\cos\theta\exp(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}kr) \tag{10.8'}$$

从上式可以看出：声源辐射的大小随方向而异，振幅随距离增加成反比地减小。声源的辐射指向特性由下式表示

$$D(\theta) = \frac{p}{p|_{\theta=0}} = |\cos\theta| \tag{10.9}$$

偶极子的辐射声强为

$$I = \mathrm{Re}(pv^*) = \frac{(|A|kd\cos\theta)^2}{2\rho c r^2} \tag{10.10}$$

由于偶极子的辐射有方向性，它所产生声波通过半径为 r 的球面的平均声功率须由积分求出：

$$\overline{w} = \iint_S I\mathrm{d}s = \iint Ir^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{3\rho c}(|A|kd)^2 \tag{10.11a}$$

通过任意球面的平均声功率为一常数。对于远场、长波长的情况，可以通过求声偶极子的等效辐射阻来比较单极子和偶极子的辐射特性。当波长远大于偶极子的尺寸，即 $kd \ll 1$ 时，偶极子源辐射的平均声功率为

$$\overline{w} = \frac{2\pi}{3}\rho c(ka)^4 d^2 u_a^2 \tag{10.11b}$$

从上式得到偶极子的等效辐射阻

$$R_e = \frac{4\pi}{3}\rho c(ka)^4 d^2 \tag{10.12}$$

在长波长条件下，偶极子的辐射阻与 k^4 成正比，单极子源的辐射阻与 k^2 成正比。所以低频时偶极子的辐射能力小于球面源的辐射能力。

10.1.3 四极子源

四极子声源由分别位于边长为 b 的等边四边形四角上的四个相同的单极子构成，其中相邻的两个单极子作反相振动。四极子源在远处产生的声压可以通过叠加原理得到

$$p = \frac{\mathrm{i}ba^2\rho ck^3U\cos\theta\sin\theta}{2r}\exp(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}kr) \tag{10.13}$$

四极子源在远场产生的声压也是与观察点的距离增加成反比，并且四极子源辐射声场的指向特性也比偶极子源复杂很多。

10.1.4 活塞源

大气中除了上述三种理想源之外还有一种能描述比较实际情况的声源，即四周为无限大障板（在实际应用的近似中，当障板尺寸远大于波长时就可看成是无限大）的活塞源。这样的声源表面是一个圆形平面，源表面各点振速相同并垂直于表面。声源的辐射被限制在一半空间内。活塞源产生的声场可看成是活塞表面上无穷多个单极子源所产生声场的叠加。考虑半径为 a 的活塞源，表面振动速度如(10.1)式所示。

活塞式声源的近场数学描述非常复杂，故仅考虑远场的声学特性。选择球坐标系 (r,θ,φ)，原点在中点，取 σ 为源表面上的径向坐标。面积元 $\mathrm{d}S=\sigma\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\varphi$，面积元到观察点的距离为 h，当距离 h 远大于声源尺寸，即 $h \gg a$ 时，距离可以近似地表示为 $h=r-\sigma\cos\varphi\sin\theta$。代入积分解中得

$$p=\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{i\omega\sigma U}{2\pi r}\exp(i\omega t-ikr-i\sigma\cos\varphi\sin\theta)\sigma d\sigma d\varphi$$

利用 Bessel 函数的性质，可将上式积出：

$$p=\frac{i\omega\sigma a^2 U}{2r}\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\exp(i\omega t-ikr) \tag{10.14}$$

活塞源的辐射声压在远场与距离成反比。活塞源的指向因子可写成

$$D(\theta)=\frac{p}{p_{\theta=0}}=\left|\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right| \tag{10.15}$$

因为对于 $x<1, J_1(x)\approx\frac{x}{2}$，故如 $ka\ll 1$ 则 $D(\theta)\approx 1$。这表明：波长远大于活塞尺寸时辐射几乎无指向性；当 ka 大于 $J_1(x)$ 的第一个根值 3.83 时，有零辐射方向出现。

10.1.5　流体源

在自然界中很多声波都是由于流体的剧烈流动产生的。如海洋波动、风和大气湍流等都能产生声波，具体例子将在下节讨论。这里先推导出流动流体辐射声波的支配方程[259]。由于流体有剧烈运动，质量流连续性方程可表示为

$$\partial_t\rho+\nabla(\rho\boldsymbol{u})=q\rho \tag{10.16}$$

其中 q 为新流体体积进入区域的速率。利用质量密度的变化与压力和温度变化的关系得到

$$\partial_t\rho\approx\gamma\rho\kappa\partial_t(p-\alpha\tau)$$

其中 γ 为绝热指数，κ 为等熵压缩率，α 为膨胀系数与等温压缩率之比，τ 为温度扰动。如用单位质量的热能表示，并略去导热性，就有

$$\partial_t(p-\alpha\tau)\approx\frac{1}{\gamma}\partial_t p-\alpha\varepsilon/C_p$$

因此质量流连续性方程变为

$$\rho\kappa\partial_t p+\nabla(\rho\boldsymbol{u})=q\rho+\frac{\alpha\gamma\rho\kappa\varepsilon}{C_p} \tag{10.17}$$

动量流连续性方程可写为

$$\partial_t(\rho\boldsymbol{u})=\boldsymbol{F}-\nabla P-\nabla T \tag{10.18}$$

$\boldsymbol{F}$ 为单位体积上的外力，P 为流体压力，T 为不包含流体压力的总应力张量。将方程(10.17)对时间微分，并取方程(10.18)的散度，然后从两个方程中消去含 $\rho\boldsymbol{u}$ 的项，再忽略导热项和黏滞项，最后得到声压的波动方程

$$\rho\kappa\partial_t^2 p-\nabla^2 p=\partial_{ij}^2 T_{ij}-\partial_i F_i+\partial_t(\rho s) \tag{10.19}$$

方程(10.19)右边出现的非齐次项一般是已知的；各项依次对应于四极子、偶极子和单极子源。右边最后一项中的 s 对应于有效单极子源强度。方程(10.19)就是

流动流体辐射声波的支配方程。在讨论海洋波动产生声波的问题中将用到这个方程。这个方程还可以用来研究湍流产生声波问题，详见参考文献[260]。

10.2 自 然 声 源

大气中广泛而大量存在着的次声波绝大多数来自自然源[76,252]。这些源之中大部分是间歇性的和偶尔发生的，但也有一些是接近连续性的，这就有可能通过其对长距离声传播的影响来研究高层大气风场的多变性。

10.2.1 海浪

地球表面大约71%的面积被海洋覆盖，海面经常处于波动状态，而海浪可以产生巨大的噪声；但并非所有海浪都能成为声波源。理论分析[286,287]表明：仅当海浪形成驻波时才可以产生声波(被称为"微气压")，而单一行波就不可能产生声波。在观测到众多自然源次声中，最富特征的要算周期约为2～8s，而振幅约为几 μPa 的微气压了。它们经常被间距约1km的次声传声器阵接收到。这种微气压信号的到达方向并不局限于单一方向，表明其空间相关性很低，从而表明为一面积很大的面源，现已确定是来自海浪[288,289]，尤其与台风紧密相关(参阅第7章第7.4.2节)。由于风暴会激发出巨大的海浪，所以当海上有风暴时，就会产生出很强的声波。

海洋表面行波不能产生声波是由于其相速度在一般情况下远小于声波相速度之故。海洋表面波是频散的，根据深水重力表面波的频散关系 $\omega^2=gk_S$(这里下标 S 表示"表面")，这里 g 为重力加速度、k_S 为海洋表面波波数，可以算出波长是15～100m。再利用深水重力波速公式 $c_S=\sqrt{g/k_S}$，即可求得相速度为5～12ms^{-1}。可见海洋表面波的相速度比声波的相速度(一般为340 ms^{-1})慢很多。声波和海洋表面波分别满足频散关系 $\omega=ck$ 和 $\omega_S=c_Sk_S$，如果有声波辐射，则其频率应该与海洋水波的频率一致，即 $w=w_S$，并且声波波数的水平分量应与水波波数相同，即 $k_x=k_S$。利用两个频散关系即可得出声波波数的铅直分量的表达式 $k_y^2=k_x^2[(c_S/c)^2-1]$。由于 $c_S<c$，所以 k_y 是虚数，即声波在海面上是衰减波，不能向远处传播。

另一方面，海洋表面波的非线性相互作用也可以辐射出声波。例如，在一直线上以相反方向传播的两个海洋表面波的相互作用即可在空气中产生声波，其频率为这两个表面波的频率之和。

下面对海洋波产生声波的情况作一些初步理论探讨[286,290]。对于海面上空的空气来说，可将起伏的海面作为一个运动着的下边界。振动的边界引起空气密度的振动，这种振动向外传播就是声波。描述声波辐射的方程是非齐次的波动方程，

非齐次项就是声源项。一般情况下，声源包括单极子源、偶极子源和四极子源；它们分别由振动边界导致空气质点位移随时间的变化、边界上压力随时间的变化和边界上速度势随时间的变化所产生。海面波动辐射声波的公式可以由方程(10.19)导出为

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2)(H(f)\rho') = \partial_{ij}^2(H(f)T_{ij}) - \partial_j(P_{ij}\partial_j H(f)) + \partial_t(\rho_0 u_i \partial_i H(f)) \tag{10.20}$$

其中，c 为空气中声速，ρ' 为空气密度因声波引起的变化，$T_{ij} = \rho u_i u_j + P_{ij}$ 为 Lighthill 应力张量，P_{ij} 为流体的压力张量；取 z 为铅直坐标，x，y 为水平坐标，$f(x,y,z,t) = z - h(x,y,t) = 0$ 描述海表面坐标，$H(f)$ 为单位阶梯函数。方程(10.20)右端第一、二、三项分别代表四极子、偶极子、单极子源，这个方程可以用 Green 函数来解。我们假定海水是不可压缩的，并且 Lighthill 应力张量满足如下运动方程：

$$\rho \partial_t u_i = -\partial_j T_{ij} \tag{10.21}$$

再将函数 H 的微商用 δ 函数表出，非齐次项可重写为

$$\partial_i(\rho u_i u_j \partial_j f \delta(f)) - \rho \delta_t u_i \delta(f) + \rho \partial_t(u_i \partial_i f \delta(f))$$

因为感兴趣的是可传播声波的辐射，所以只考虑远场解，并且只考虑波长很长的情况，于是可假定表面波的振幅 h 相对于表面波波长是小量。为了得到声辐射效应，保留表面波参数的线性项和二次项而舍弃更高阶的项；经过这些处理，可得到海洋表面波辐射声波的普遍解为

$$\rho' = -\frac{\rho_0}{8\pi c^3}\partial_t \int \frac{z}{R^2} u_z^2 \mid_{z'=0,\tau=t-R/c} \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{10.22}$$

其中 $R = ((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2)^{1/2}$，$u_z = \partial_t h$ 为水表面的铅直速度。从(10.22)式可以看到，解中包含了表面波铅直速度的平方。

下面来分析解(10.22)式。我们只考虑海洋波是简谐振动的情况，将 u_z 表示成简谐振动的形式，代入方程(10.22)即可计算出辐射声场。首先考虑较简单的情况，即只有一对海洋表面波相互作用，在二维情况下，取

$$h(x,y) = a_1\cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1) + a_2\cos(\omega_2 t - k_2 x + \phi_2) \tag{10.23}$$

其中 ω 和 k_s 满足海洋深水表面波的频散关系 $\omega = \sqrt{g|k_s|}$，a_1，a_2，ϕ_1，ϕ_2 均为待定常数。所以，海洋表面的铅直速度分量就是

$$\begin{aligned} u_z = & -\omega_1 a_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1)\exp(-|k_1|z) \\ & + \omega_2 a_2 \sin(\omega_2 t - k_2 t + \phi_2)\exp(-|k_2|z) \end{aligned} \tag{10.24}$$

由上述讨论可知，只有一个表面波时是不可能辐射声波的，所以考虑由两个波组成的交叉项

$$u_z^2 \to \omega_1\omega_2 a_1 a_2(-\cos(\omega^+ t - k^+ x + \phi^+) + \cos(\omega^- t - k^- x + \phi^-)) \tag{10.25}$$

其中 $k^\pm = k_1 \pm k_2$，$\omega^\pm = \omega_1 \pm \omega_2$，$\phi^\pm = \phi_1 \pm \phi_2$，且在 $z=0$ 处计算表达式。将(10.25)

式代入(10.22)式,可得

$$\rho' = \frac{\rho_0\omega_1\omega_2 a_1 a_2}{4c^2}(\cos(\omega^+ t - k^+ x + \phi^+ - k_z^+ z) - \cos(\omega^- t - k^- x + \phi^- - k_z^- z)) \tag{10.26}$$

其中

$$k_z^{\pm} = \sqrt{\left(\frac{\omega^{\pm}}{c}\right)^2 - \left(k^{\pm}\right)^2} \tag{10.27}$$

可以看出两个海表面波的非线性相互作用会辐射两个声波,它们的频率和水平波数分别等于这两个海波的频率和波数之和与差,但是可以证明差频波是衰减波(本质上是由于上面所提到的相速度不匹配造成的),所以只考虑和频波

$$\rho' = \frac{\rho_0\omega_1\omega_2 a_1 a_2}{4c^2}\cos(\omega^+ t - k^+ x - k_z^+ z + \phi^+) \tag{10.26a}$$

为了使 k_z^+ 是实数,可以证明:两个海洋波的传播方向必须非常接近地在同一条直线上且相反。为了使我们有一个直观的认识,考虑一个理想情况:海洋驻波。可以取 $a_1 = a_2 = a, \omega_1 = \omega_2 = \omega, k_1 = -k_2 = k_s, \phi_1 = \phi_2 = 0$,则

$$h(x,y) = a\cos(\omega t - k_s x) + a\cos(\omega t + k_s x) = 2a\cos(\omega t)\cos(k_s x) \tag{10.28}$$

在这种情况下,(10.26a)式给出

$$\rho' = \frac{\rho_0\omega^2 a^2}{4c^2}\cos(2\omega t - k_z^+ z) \tag{10.29}$$

其中 $k_z^+ = 2\omega/c$ 是实数。这是一个垂直向上传播的行波。可见声波频率是海洋驻波频率的两倍,且与水平坐标 x 无关。这是由于声波解依赖于海洋波速度的平方项所造成的。此时声波解中的二次项为

$$u_z^2 = a^2\omega^2[1 + \cos(2k_s x) - \cos(2\omega t)\cos(2k_s x) - \cos(2\omega t)] \tag{10.30}$$

分析一下方括号中的四项:前两项与时间无关所以不会辐射声波;可以证明第三项只能辐射衰减波;第四项随时间变化的频率为 2ω,并且不依赖于水平坐标,这与(10.29)式给出的声辐射一致,因此只有第四项能辐射声波。由此可见,海洋驻波产生声辐射并非由于海面简单活塞运动的结果,而是海面上空气的振荡与激励这一振荡的海洋表面波之间复杂相互作用的结果。

接下来考虑由一段频谱范围内海洋表面波的相互作用所产生的声辐射。仍只考虑二维情况,若一段连续频谱的海洋表面波的频谱为 $A(k_s)$,则海表面扰动由 Fourier 积分给出

$$h(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_s)\cos(\omega t - k_s x + \phi(k_s))\mathrm{d}k_s \tag{10.31}$$

其中 $\omega = \sqrt{g|k_s|}$。同样,定义辐射声波的频谱为 $B(k_x, k_z)$,k_x 和 k_z 分别为声波的水平波数和铅直波数,并且 $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$,声波的质量密度的变化量表示为

$$\rho'(x,z,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}B(k_x,k_z)\cos(\omega t-k_x x-k_z z+\phi(k_x+k_z))\mathrm{d}k_z\mathrm{d}k_x \tag{10.32}$$

其中 $\omega=c\sqrt{k_x^2+k_z^2}$。利用(10.22)式和(10.31)式得到

$$\rho'=\frac{\rho_0}{4c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A(k_s)A(k_s')\omega\omega'\cos((\omega+\omega')t-(k_s+k_s')x-k_z z+(\phi+\phi'))\mathrm{d}k_s\mathrm{d}k_s' \tag{10.33}$$

其中 k_z 就是(10.26a)式中的 $k_z^{\dagger}$。为了得到 $B(k_x,k_z)$ 的表达式，将(10.33)式写为(10.32)式的形式。首先使用变换

$$k_x=k_s+k_s' \qquad \xi=k_s-k_s' \tag{10.34}$$

则积分变为

$$\rho'=\frac{\rho_0}{8c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A(k_s)A(k_s')\omega\omega'\cos((\omega+\omega')t-k_x x-k_z z+(\phi+\phi'))\mathrm{d}k_x\mathrm{d}\xi \tag{10.35}$$

其中

$$k_z=\left(\frac{g}{2c^2}|k_x+\xi|+\frac{g}{2c^2}|k_x-\xi|+\frac{2g}{2c^2}|(k_x+\xi)(k_x-\xi)|^{1/2}-k_x^2\right)^{1/2} \tag{10.36}$$

必须使 k_z 为实数，因为 g/c^2 是小量，所以必须有 $|\xi|\gg|k_x|$；则有近似式

$$k_z\approx\left(\frac{2g}{c^2}|\xi|-k_x^2\right)^{1/2} \tag{10.37}$$

使用这一表达式，用 k_z 代换(10.36)式中的 ξ(注意 ξ 的正负)，则

$$\rho'=\frac{\rho_0}{4c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}A(k_s)A(k_s')\omega\omega'\cos((\omega+\omega')t-k_x x-k_z z+(\phi+\phi'))k_z\mathrm{d}k_z\mathrm{d}k_x \tag{10.38}$$

其中

$$k_s=\frac{1}{2}(k_x+\xi)=\frac{c^2}{4g}(k^2)+\frac{1}{2}k_x \tag{10.39a}$$

$$k_s'=\frac{1}{2}(k_x-\xi)=-\frac{c^2}{4g}(k^2)+\frac{1}{2}k_x \tag{10.39b}$$

$$\omega=(g|k_s|)^{1/2}\approx\frac{1}{2}ck+\frac{gk_x}{\sqrt{2}c}\frac{1}{k} \tag{10.40a}$$

$$\omega'=(g|k_s'|)^{1/2}\approx\frac{1}{2}ck-\frac{gk_x}{\sqrt{2}c}\frac{1}{k} \tag{10.40b}$$

(10.39a)式～(10.40b)式中每个表达式的最后一项均为小量。将这些表达式代入(10.38)式中，保留与 g/c^2 同阶的项，辐射声场最后可以表达为

$$p' = \frac{\rho_0 c^2}{16g}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} A(k_s)A(k_s')k^2 k_z \cos((\omega+\omega')t - k_x x - k_z z + (\phi+\phi'))\mathrm{d}k_z \mathrm{d}k_x \tag{10.41}$$

比较(10.32)式和(10.41)式即得到辐射声场的 Fourier 频谱为

$$B(k_x,k_z) = \frac{\rho_0 c^2}{16g}k_z k^2 A(k_s)A(k_s')$$

$$= \frac{\rho_0 c^2}{16g}[k_z k^2]A\left(\frac{c^2}{4g}k^2 + \frac{1}{2}k_x\right)A\left(-\frac{c^2}{4g}k^2 + \frac{1}{2}k_x\right) \tag{10.42}$$

因为 c^2/g 是很大的量,如果 $A(k_s)$是缓变的,则(10.42)式可以近似为

$$B(k_x,k_z) = \frac{\rho_0 c^2}{16g}[k_z k^2]A\left(\frac{c^2}{4g}k^2\right)A\left(-\frac{c^2}{4g}k^2\right) \tag{10.42a}$$

方程(10.42a)给出了海洋表面波频谱与所辐射的声波频谱之间的关系。从这个关系式可以得到一些有用的结果。

首先看一下关系式中的比值 g/c^2。海洋表面波的相速度是 $\omega/k_s = \sqrt{g/k_s}$,声波的相速度是 c,令两者相等,两边再取平方,可得

$$k_s = \frac{g}{c^2} = K_{SA} \tag{10.43}$$

K_{SA}是使海洋表面波的相速度等于声波相速度时海洋波的角波数。换算成波长的话,取 $c=340\mathrm{ms}^{-1}$,$g=9.8\mathrm{ms}^{-2}$,可得

$$\lambda_{SA} = \frac{2\pi c^2}{g} \approx 74\mathrm{km} \tag{10.44}$$

即当表面波的波长小于 $\lambda_{SA}\approx 74\mathrm{km}$ 时其相速度就小于具有相同波长的声波。因为绝大多数海洋表面波的波长都小于 74km,所以,大多数海洋表面波都比声波的速度慢。事实上,在求声辐射解时已经用到了这一条件。

关系式(10.42)中方括号内的项可以看成是海洋表面波辐射声波的频谱转换的效率因子。这一项随着$|k|$的增加而增加,所以,短波长的海洋表面波辐射声波效率更高。换句话说,高频的海洋表面波会辐射出更多声能,这是由声源特性决定的。这一结果表明:海洋表面波频谱的峰值在声波的频谱中会向高频移动。

利用(10.42)式还可以考虑声辐射的指向性。因为声波频谱和声波数的铅直分量 k_z成正比。声波频谱可以表达成

$$B(k_x,k_z) = \frac{k_z}{k}A'(k) = A'(k)\cos\theta$$

其中 $A'(K)$取决于海洋表面波频谱的形状。从上式可以看出声辐射在铅直方向最大,在水平方向为零,在两者之间以余弦规律变化。这相当于偶极子源的极轴在水平方向上。这个指向性与声波的波数无关,也与海浪频谱的形状无关。

10.2.2　重物落水

当岩石或冰架等巨大重物落入水[291]中时，可以产生巨大的声音；而激起的水浪可以产生可听频率的声音，此外还可以产生远距离传播的低频次声。如果物体的尺寸很大，到了百米的量级，在水表面也可以产生和物体尺度相当的垂直位移，由此产生的表而水波可以辐射很强的次声波。

一物体落入一自由水表面的过程会产生一系列复杂结果，特别是当落入的物体形状不规则时，很难用数学模型准确地描述此过程所产生的声波。对于这种情况可以考虑几种理想情况，从理论上进行估算。

基本的假定是：水被看作是不可压缩流体，声辐射不会明显影响它的运动。考虑一个理想的球体落入水中所形成的水波，随着水波的扩散，振幅迅速减小。我们只考虑中心的一个波，它由一半径为 a 的圆形区域和外围一反相的、半径为 b 的同心圆环组成。由于体积守恒，内圆和圆环的而积相等，所以有 $b=\sqrt{2}a$。内圆和圆环构成互为反相的一对偶极子，如图 78 所示。

我们采用带障板的平面活塞振动这一理想模型，其声辐射公式为

$$p=-\frac{\exp(ikr)}{r}\frac{i\omega\rho Ua^2}{2}\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta} \tag{10.45}$$

其中，U 为活塞运动的速度振幅，a 为活塞的半径，θ 为观察点到声源的连线与水面法线间夹角，ω 为角频率，k 为波数，r 为声源到远处观察点的距离。

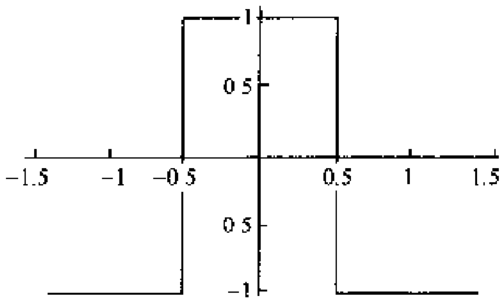


图 78　理想的双偶极子

可将反相双偶极子的辐射看成是两个半径分别为 a 和$\sqrt{2}a$ 的同心圆所辐射声波的差值。那么，反相的内圆和圆环的辐射之和就是：

$$p=-\frac{i\omega\rho Ua^2}{r}D \tag{10.46}$$

其中

$$D=\left[\frac{4J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}-\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right] \tag{10.47}$$

为描述所辐射声波指向性的指向性因子。当 $\theta=0$ 时 $D=0$，这对应于一个偶极子的辐射；$\theta=\pi/2$ 时辐射在水平方向达到最大值。下面我们来估算声辐射的幅值。如果物体是离水面很近地缓慢落入水中，辐射声波的频率主要和表面水波的振动频率一致，水波的频率可用下述方法来分析。由于所产生表面波的波长约为 a，故有 $k_S a\approx1$。因 $\omega\approx c_S k_S=\sqrt{gk_S}=\sqrt{g/a}$，当表面位移的幅值为 h 时，活塞的振动速度 $U=\omega h=h\sqrt{g/a}$。将 U 和 ω 的表达式代入声压的公式(10.46)即得到声压的幅值为

$$P\approx\frac{\rho gah}{r}D(ka,\theta) \tag{10.48}$$

假定 $h=0.2a$，则 $k=\sqrt{g/a}c^{-1}$，可以得到：$k/k_S=c_S/c<1$，即声波波长大于水波波长。现举一数值例子：假定 $a=50\text{m}$，$h=10\text{m}$，那么 $\omega=\sqrt{g/a}=0.44\text{rad/s}$，对应的频率为 $f=0.07\text{Hz}$，$ka=0.065$，空气密度为 1.3kg/m^3。当 $\theta=\pi/2$ 时，$D=5.3\times10^4$，则在 1km 处的信号为 0.003Pa 量级。

如果物体是从高空落入水中，撞击水面的速度 V 很快。表面水波的频率就不能按上述方法来确定了。可以假定水表面的上升和下沉一次的特征时间 T 由物体穿过表面的时间尺度决定。此时，表面运动的特征频率可以估算如下：$\omega\approx2\pi/T\approx2\pi V/2a$。表面位移速度 U 和 V 为同一量级，最大位移是 a。在这种情况下，(10.48)式变成

$$P\approx\frac{\pi\rho aV^2}{r}D(ka,\theta) \tag{10.48'}$$

其中 $k=\omega/c=\pi V/ac$，$ka=\pi V/c$。同样举一典型的数值例子：如 $a=50\text{m}$，$V=10\text{m/s}$，$\omega=0.6\text{rad/s}$ 对应频率为 $f=0.1\text{Hz}$。则 $ka\approx0.09$。当 $\theta=\pi/2$ 时，D 的最大值约为 0.001。声压辐值约为

$$P_{\max}=\frac{20}{r_m}\text{Pa}$$

所以，在 $r=1\text{km}$ 处我们得到了声信号的量级为 0.02Pa。一般声压大于 0.01Pa 的信号就可被检测到。

另一简化的极限模型是单偶极子源，在物体撞击自由水表面的最初阶段有可能实现这种情况。落物在水中产生一个气穴，由浮力驱动很快上升到表面就可以产生这样的突起。在前述的双偶极子源模型中将外面的圆环去掉就变成了单偶极子源模型。由于没有外圆环的抵消作用，单偶极子源产生的声压要更大一些。

10.2.3 大火

大火也是一种重要的声源，强烈的燃烧过程可以明显地辐射次声。实际测量结果表明：产生声波的频率和火场的尺寸有关；并且探测到的声压的增加和衰减与报道的火灾强度的变化一致。大火燃烧的过程非常不稳定，在大火区域内不同局

部的火焰会产生不稳定的周期性，使周围气压振荡，因而产生声波。从火灾现场的大量测量数据可以总结出一个声波频率与火场尺寸关系的经验公式[292,293]

$$f = \frac{1.5}{\sqrt{2r}} \tag{10.49}$$

其中，f 为所辐射声波的频率，r 是火场半径。这个公式适用于覆盖直径从 0.01 到 100m 的火灾现场。

对于火焰的研究是一个非常有趣而有用的课题。在早期的火焰研究中已经发现[294]，从管中喷出的燃气在燃烧时火焰并不是连续的，而是时有时无；在火灾中也有类似情况。Cetegen 和 Amged 的模型中把火场看作由一系列交替地产生和消失的子热源组成，在此过程中产生了声波[292]。子热源是如何形成的以及它们之间是如何相互影响而产生周期效果都有待进一步研究。下而我们看一下和经验公式(10.49)相关的简单理论分析。大火燃烧时热空气上升，周围的空气要补充进来。下面的示意图 79 定义了一些相关的变量。

图中 W 是上升热气流的速度，U 是流入火场的气流速度，两者近似相等。Froude 数的定义在讨论不同问题时可以有不同的形式[295]。与高温相关的 Froude 数 F 可以定义为

$$F = \left(\frac{T}{\Delta T}\frac{U}{gr}\right)^{1/2} \tag{10.50}$$

其中，ΔT 为火焰温度，T 为环境温度；火场的特征时间为 $\tau = r/U$，所产生声波的

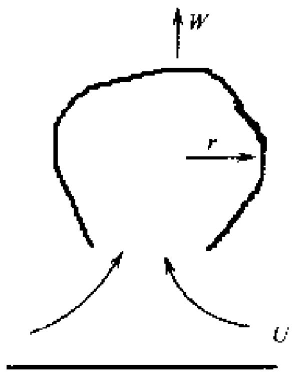


图 79 火焰中气流流动的示意图

频率 f 是特征时间的倒数：

$$f = 1/\tau = U/r$$

利用 Froude 数的定义(10.50)，声波频率可以写成

$$f = \frac{F}{r}\left(\frac{\Delta T}{T}gr\right)^{1/2} = F\left(\frac{\Delta T}{T}\frac{g}{r}\right)^{1/2} \tag{10.51}$$

考虑一个典型的例子：$g = 9.8\text{m/s}^2$，$\Delta T = 2100\text{K}$，$T = 300\text{K}$，则

$$f=\sqrt{70}\,\frac{F}{\sqrt{r}}\approx 8.4\,\frac{F}{\sqrt{r}}$$

和经验公式(10.50)相比较，$f=1.5/\sqrt{2r}\approx 1.04/\sqrt{r}$，我们可以算出 Froude 数约为 $F\sim 0.124$。这个结果表明了，火中的浮力要比惯性力大十倍左右。

有一些次声监测阵监测到了实际火灾产生的次声波[293]，监测数据可以和经验公式预言的声波主要频率相比较。

2001 年美国的一家再生木材的存储仓库发生了一场火灾，这场火灾产生了一个明显的声信号，持续了 3 个多小时，如图 80 所示。并且在火灾的强度最高时，测量数据的相关系数达到了 0.9。监测站还测量到了作为时间函数的方位角，当火灾在仓库地区蔓延时，测量的方位角随时间变化。探测到的声压级峰值大约是 0.2Pa，并且在 10km 以外的范围内都可以很容易地探测到。火灾最大时产生的声波的主要频率为 1～2Hz，而在后续阶段，主要频率为 1～4Hz。

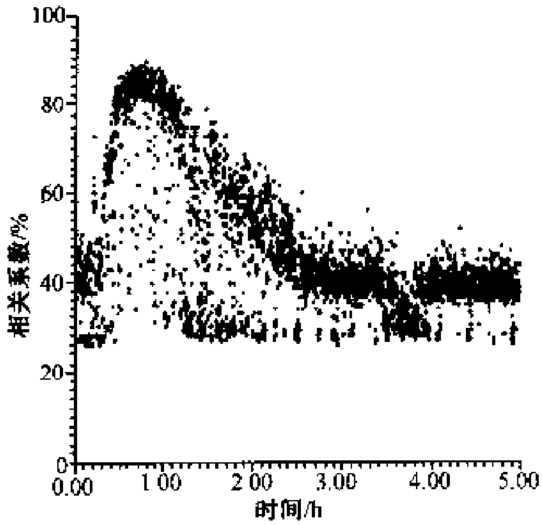


图 80　木场火灾所产生次声波相关系数随时间的变化

2001 年天然气中心由于天然气泄漏而造成另一次火灾，大火产生了明显的次声；1km 外的次声观测站记录了这场持续了大约 6 个小时的火灾。测量信号随时间变化的记录如图 81 所示，图中还清晰地显示了来源于燃烧气体的爆炸所产生的次声。由于这两场火灾的情况都是已知的，用监测到的数据进行处理可以得到和经验公式一致的结果。

10.2.4　大风

(1)山背波

在一定的气流和一定的山形走向条件下所产生的一种山区特有的次声

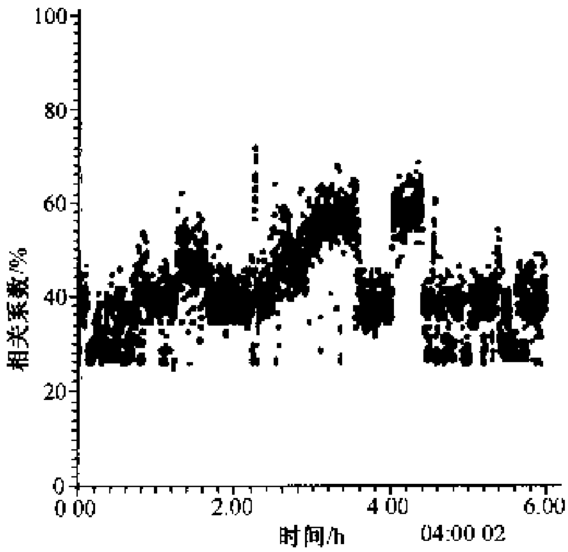


图81　天然气中心火灾所产生次声波相关系数随时间的变化

波[296]，称为山背波，其典型周期约为40s，典型振幅将近0.5Pa。当空气足够饱和以至可产生云时，山背波可导致非常壮观而独特的云相，从而用肉眼就可判定它们。由于它是造成猛烈晴空湍流(CAT)的重要原因，其对飞机的潜在威胁已不再被怀疑[297]。

有些丘陵地区附近经常在冬季能够监测到大规模的次声信号源[298]，这表明了某些山区地形特征特别有利于声波的产生。位于美国科罗拉多州伊利湖的Boulder(即美国国家海洋大气局(NOAA)的所在地)大气观测站的次声阵列给出一个山背波观察的例子。这个观测站检测到在声级和种类上差别很大的两类声信号，均来源于山脉方向：一类声信号的频率在0.5～1.0Hz范围内，具有很好的信号相关性，相关系数大于0.7，信号的出现与高空飞行员报告的恶劣天气状况一致，因此这类声信号被认为是由高空的湍流产生的；另一类声信号的频率在1～5Hz范围内，声源的方向指向山脉，和低海拔的气流与地形相互作用关系很明显，是典型的山背波，但这类声信号的相关系数较低，一般小于0.6。图82显示出检测到的声信号的相关系数与时间的函数关系，图中箭头给出飞行员报告出现湍流的位置；数字代表湍流的激烈程度：1＝轻度、2＝轻度～中度 3＝中度、4＝中度～重度、5＝重度。但应注意的是，没有湍流报告，并不一定代表湍流没有出现，因为有时当飞机一开始接触到湍流时，湍流可能就会迅速避开，所以探测不到。

(2)风暴及其他恶劣天气

猛烈的对流性风暴所产生的次声强度很大而周期约在0.2～2min之间，可在数百米至1Mm以外被检测到，而且次声观测与波状电离层运动的电磁波Doppler探测之间存在着很强的相关性，从而认为这两种现象是单一源过程的不同表现形

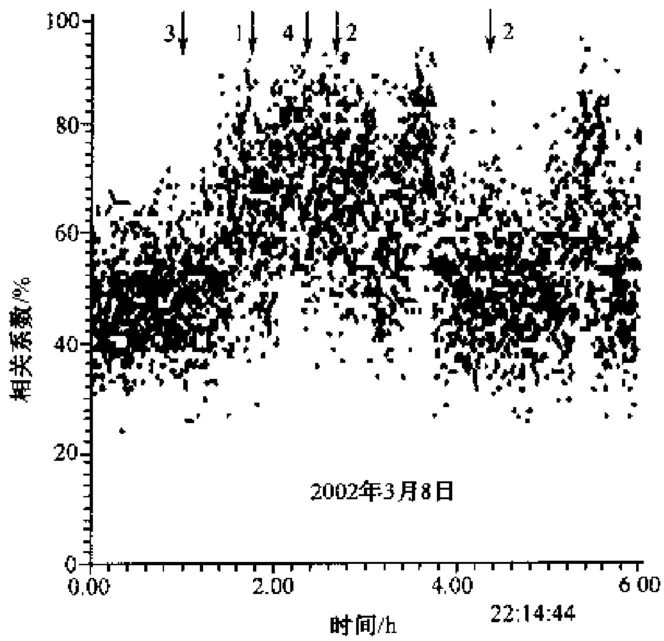


图 82 相关系数作为时间的函数

式[299]。对几种可能的发声机制作分析比较后，认为最有可能的是一种涡流辐射机制——龙卷气旋。由于通过大气的时间非常有限，所以次声不大可能用来预报风暴，但是次声检测有可能是现行的雷达网警报系统一种有用的辅助。

除台风和风暴以外，其他许多恶劣天气如雷雨、一般的大风、冰雹、连绵的雨等都可以产生各有特色的次声[300]。

10.2.5 地震

地震产生可听声频波，也会产生次声波。地震产生的次声波既可由地表的振动、也可由山体的振动引起。由地表振动产生的次声又可分成两类：一类是当地次声波，它是由地震波传播到某一地区后引起当地地面振动而向大气辐射出的声波，其传播方向基本上是垂直于地面向上的，与海洋表面波所产生的声波有些类似，其周期与地球表面的地震波的周期一致，在记录到的次声波中有对应于地震波中的纵波、横波和表面波等波群，周期大致为十几秒；另一类是震中次声波，它是由震中区地面的剧烈振动而辐射出来的，它通过大气传播，在距离震中较远处其传播方向接近于水平，当在大气波导中传播时其水平方向的传播速度略小于声速。

由山体振动产生的次声波叫衍射次声波。它是由地震波在传播过程中经过高地或山脉等复杂地形时，使这些地形的表面产生振动而辐射出的次声波。这种次声波的传播方向依地形而定，可以向不同的方向传播。

地震产生的次声波可以传播到离地面二百多 km 的电离层，引起电子扰动。

全球监测网络曾取得 1999 年土耳其地震和 1998～2000 年间 Kennedy 火箭发射中心发射火箭时在大气电离层中电子扰动的监测数据[301]，结果表明：不论声波是由地震引起的还是由火箭发射引起的，它们所产生的扰动都有激波的性质，周期为 200～360s，激波信号比背景噪声高 2～5 倍。在地震中，声源的位置近似地与震中吻合；而在火箭发射中，声源的位置在推进轨道上距起始点不少于 500～1000m 处，飞行高度不低于 100km。

10.2.6 火山喷发和陨石坠落

火山喷发蕴藏着巨大的能量，喷发出来的物质会激起空气的强烈扰动，从而产生可听声和次声。火山喷发有不同的类型，熔岩缓慢流出的火山喷发所产生的声波频带很宽，但可以看出基频和谐频。爆炸式的火山喷发会产生爆炸和激波，并可以产生频率很低的次声波。历史上有记载的最强的自然次声源，就是一次爆炸式的火山喷发：1883 年 8 月 27 日，位于印度尼西亚的喀拉喀托火山突然爆发，产生的强大次声波绕地球转了好几圈，传播了十几万千米，它的周期为几百秒，振幅在几万千米远的地方还有上百毫帕。由于产生的次声波很强，当时用简单的气压计就检测到了次声波的存在。

同样在自然界，由爆炸产生的次声还有流星爆炸。一个著名的例子就是在 1908 年发生在西伯利亚通古斯卡地区的大爆炸，产生的次声波的振幅在 100μPa 以上，周期达一分钟。

10.2.7 极光

极光产生次声波的机理取决于极光的种类和极光的活动。当电离层整体运动时，出现极光的电离层中受太阳粒子辐射后温度上升，使较热电离层也上升，上升到一定高度后受到冷却又下降，如此上下起伏的运动就辐射出次声波。由于电离层的区域很大，整体运动所产生的上下起伏周期较长，所以产生的次声波的周期也较长，一般在一分钟左右。

另一种在电离层中的次声波，周期更长，一般有好几分钟，并且传播速度为 500ms^{-1}～1200ms^{-1}，超过声速。这种高速次声波由超音速运动的极光弧产生：极光中的导电微粒在地磁场的作用下会以超音速作大规模的整体运动，从而产生热、使电离层受到扰动，同时带电粒子也受到电磁力的作用而产生扰动，这些扰动就辐射出次声波。这种次声波是伴随极光弧运动的，所以它产生的次声波也以超音速传播。

极光也可以产生周期较短的次声波，短周期的次声波的频率仅为几赫兹，并且以半分钟到一分钟的周期脉动出现。这可能是由于极光中导电性的瞬时增加和局部极光电子喷流垂直穿过电离层引起压力扰动而产生的。

10.2.8 其他①

包括许多地球物理现象以至天文现象都可以引起次声波，除上文列举的最重要的几种以外，还可提到锋面过境、急流、日食[302]等等。

作为总结，将迄今已被检测到的几种主要自然源次声的若干重要特征在表 V 中列出。

表 V 已观察到的自然源次声波

来 源	气象现象				山背波	火山陨石	极光	地震	日食
	微气压	恶劣天气	锋面过境	急流					
形成机制	台风形成海浪向大气辐射	—	压力跳跃浮力振荡	切变不稳定性	气流流过山地	爆炸	极光弧和电射流中的超音速运动	脉冲辐射	月影区造成局部大气温度降低
周期(s)	5—7	12—60	180—1500	240- 7200	20 70	1 300	10—400	12—25	600—1800
振幅(Pa)	0.01—0.1	0.05—0.3	5 200	5 20	0.05—0.3	<500	0.1—0.5	0.1—0.2	3—10
延续时间	数小时至数日	数分钟至数小时	数分钟至数小时	数小时至数日	数小时至数日	<1 小时	数秒钟至数小时	<1 小时	数小时
水平迹速度(m/s)	340	330--360	2—20	15--75	340	320--500	400--1200	340	未测定
横向相关距离(波长倍数)	—2	—14	—	—	--14	14	--	·	—
明显特征	接近单频波，串珠状波包，低相关	方位随时间变化，春夏之交达巅峰	大振幅，常为波状	低相速度	固定方位持续至数日，局部易产生于冬季	长周期波领先于短周期波	高速，短脉冲领先于长周期波；仅在磁纬> 30°区域内观察到	长周期波领先于短周期波	长周期波领先于振幅度较大的短周期波

① 有关这类现象的文献非常之多，这里仅以不同角度每类选取一篇，但并不都是有代表性的，关于各种相应波形特征的讨论可参阅文献[208]。

10.3　人工声源

10.3.1　飞机

飞机在飞行时发动机可以发出巨大的声音。但飞机在几km高空以超音速飞行时，地面听到声音却不是飞机发动机直接产生的。当飞行器以超音速飞行时，在飞行器前方空气被挤压，形成很强的高压，而在飞行器后方，空气被排开，形成很陡的负压。大气中高压区和负压区两者结合起来，就形成像英文字母"N"形状的波形。N波传播到地面就是我们所听到的巨大声音。此时地面听到的声音被称为声爆，关于声爆的理论分析在第9章第9.2节中已作详细讨论。

当飞行器足够大时，N波里还含有次声成分。一个典型的例子是协和式超音速飞机产生的声爆[303]。协和式超音速飞机是由英法两国政府在1962年提议并执行建造的两倍于声速的民航客机。由于它飞行时会产生巨大声爆，所以规定它在高速飞行时只能在海域上空飞行，而飞行高度必须在18km以上，这样既不会遇到其他的商用飞机，又能避开恶劣的天气。法国Flers的次声阵列系统的观测表明：一些清晰的次声信号一天中几次出现，这些信号与法国民航、英国民航在北美(纽约)和欧洲(伦敦和巴黎)之间往返的有规律的航班有关。

10.3.2　火箭

次声是由火箭发射时和再入大气层时，在10～30km高空产生的空气动力声所致。火箭作超音速飞行时，会产生更强的N波。波动通过大气声道传播，可以传播远达上千千米。火箭产生的次声波的声压辐值可以达到二十几微帕量级；信号持续时间达几分钟，甚至达到十分钟左右。当火箭尺寸较小时，它所产生的次声波能量也较小，传播的距离也相应较短。此外，火箭壳体结构也会辐射出声波，这些声波中也包含很多次声频成分。在发射场附近，这种声波相当强，对周围建筑或仪器会产生破坏作用。

10.3.3　高空爆炸

早在20世纪50年代就以测量爆炸源的声传播来推断平流层的温度和风[304,305]①。在这些值得注意的可控制实验中，重1800kg的炸弹从B-29飞机上掷下，而在225～450km以外用传声器的环形阵来记录声音。高层大气的风就可由

① 以其基本涵义来说，这也应看成是一种"主动遥感"，因爆炸是人为形成的，但却与第8章第I部分中所述的主动遥感有原则区别，因为很大程度上许多因素都是不可控制的，并且其发射、接收和分析方法也都迥然不同。

延迟时间、到达高角和到达方向对已知源方向的方位偏离等推断出来。

10.3.4 大气核试验

在20世纪五六十年代,对大气中低频声波和声重力波的长距离传播模型做了大量尝试。其推动力乃是对远方大气核爆炸试验的检测、定位和当量估算。由于这种声源发出的部分声能要通过高层大气,所以必须了解这部分大气是如何影响接收到信号的特性的。很快就推测到这种信号可用来研究高层大气本身,最早的尝试就是简单地将观测到的信号与用简单的分层大气模型计算得出的信号二者声重力波模式的频散关系加以比较[306]。在文献[307]中提出高层大气风影响氢弹爆炸压力波频散的模型,文献[308]试图将爆炸信号的反常延时解释为射线路径被水平风和温度结构所折射并分裂。一些季节性的经验模型被采用来对综观风场的影响改正长距离爆炸信号的方位角测量。所有考虑过的传播模型都经过许多精心改进,可惜在从核爆炸数据中提取有用的大气有关信息方面所取得的进展仍然不大。

关于大气核爆炸对电离层的影响方面有许多文献。例如,F层中可认为是由声波和重力波的导波模式造成的大幅度波状扰动的描述[309,310]等。可是,对定位和当量估算的注意再次大大超过对居间大气性质的分析。

10.3.5 航天飞机的爆炸[147]

1986年1月28日美国航天飞机"挑战者号"的悲剧性爆炸无论就其爆炸高度和爆炸方式来讲都是历史上仅见的。幸运的是能及时捕捉到这一千载难逢的机会将相应所产生的次声记录下来,以致成为全球的这方面的唯一资料。

北京次声站以一组置于地面上的高灵敏度电容式微气压计和多笔记录器长期对大气中各种次声进行监测,在这次爆炸约12小时53分之后接收到如图83所示的波形(协作单位贵州省气象科学研究所则于13小时29分之后收到类似信号)。根据对该波形中四个特强波峰a、b、c、d的分析,其所对应的波特性如表Ⅵ所示:

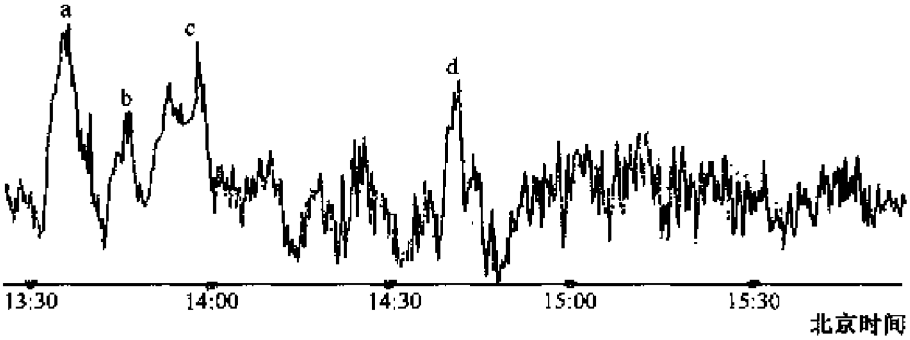


图83 在北京地面上接收到的美国航天飞机"挑战者号"爆炸时所产生的次声波列

表 VI　"挑战者号"爆炸所产生次声波参数

波形编号	a	b	c	d
达到时间(北京时间)	13:31	13:42	13:48	14:38
周期/s	648	396	744	480
振幅/mV	146	82	116	130
折合声波振幅/Pa	32.5	12.5	29.0	23.5
对应波速/(m/s)	302	298	295	278

参考文献

[1] 杨训仁. 大气声学:关于现象、原理和应用的综述,应用声学,1994,13:(1):1~5;13:(2):1~7.

[2] Brown E H, Hall F F. Jr. , Advances in atmospheric acoustics. Review of Geophysics and Space, 1978, 16(1):47.

[3] Reynolds O. On the refraction of sound in the atmosphere, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1876, 166:315.

[4] Stokes G G. On the Effect of Wind on the Intensity of Sound, Report, 22, Brit Ass. , Dublin; Mathematical and Physical Papers of G. G. Stokes, 1857, 4:110, New York: Cambridge Univ. Press. 1904.

[5] Tyndall J. On the atmosphere as a vehicle of sound, Phil. Trans. Roy, Soc. London, Ser. A, 1874, 164:183.

[6] Teisserenc de Bort L P. Variations de la temperature de l'air libredans la zone comprise entre 8 km et 13 km k'altitude, C. R. Acad, Sci. , 1902, 134:987.

[7] van den Borne G. Über die schallverbreitung bei explosions-katastrophen, Phys. Z. , 1910, 11:483.

[8] Emden R. Beiträge zur thermodynamik der atmosphäre, Meteorol. Z. , 1916, 33: 351.

[9] Whipple F J W. The high temperatures of the upper atmosphere as an explanation of zones of audibility, Nature, 1923, 111:187.

[10] Gowan E H. Low frequency sound waves and the upper atmosphere, Nature, 1929, 124:452.

[11] Gutenberg B. The velocity of sound-waves from gun-fire in southern California, Eos Trans. AGU, 1938, 19:156.

[12] Stroud W G, Nordberg W. J. Walsh. Atmospheric temperatures and winds between 30 and 80 km, J. Geophys. Res. , 1956, 61:45.

[13] Taylor G I. Eddy motion in the atmosphere, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1915, 215:1.

[14] Обухов А М. О рассеянии зоука в трубулентном потоке, Докл. АНСССР, 1941, 30:611.

[15] Bergmann P G. The wave equation in a medium with a variable index of refraction, J. Acoust. Soc. Amer. , 1946, 17:329.

[16] Bergmann P G. Propagation of radiation in a medium with raudom inhomogeneities, Phy. Rev. , 1946, 70:486.

[17] Blokhinzev D. The propagation of sound in an inhomogeneous and moving medium, J. Acoust. Soc. Amer. , 1946, 18:322.

[18] Kraichnan R H. The scattering of sound in a turbulent medium, J. Acoust. Soc. Amer. , 1953, 25 :1096.

[19] Lighthill M J. On the energy scattered from the interaction of turbulence with sound or shock waves, Proc. Cambridge Phil. Soc. , 1953, 49:531.

[20] Batchelor G K. Wave scattering due to turbulence, in Symposium on Naval Hydraulics (ed. Sherman F S), 409-, Washington D. C. :National Academy of Sciences. 1957.

[21] Tatarskii V I. Wave Propagation in a Turbulent Medium, Silverman R A 英译, New York: Dover. 1961.

[22] Monin A S. Characteristics of the scattering of sound in a turbulent atmosphere, Sov. Phys. Acoust. , 1962, 7:370.

[23] Gilman G W, Coxhead H B, Willis F H. Reflection of sound signals in the troposphere, J. Acoust. Soc. Amer. , 1946, 18:274.

[24] McAllister L G . Acoustic sounding of the lower troposphere, J. Atmos. Terr. Phys. , 1968,30:1439.

[25] Колмогоров A H. The local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, Докл. АН СССР, 1941, 30: 301.

[26] Monin A S, Yaglom A M. Statistical Fluid Mechanics, MIT Press, Cambridge, Mass. ,1974, I; 1974,Ⅱ.

[27] Wesely M L. The combined effect of temperature and humidity fluctuations on refractive index. ,J. Appl. Meteorol. , 1976,15,43.

[28] Brown E H, Ckuffird S F. On the attenuation of sound by turbulence, J. Acoust. Soc. Amer. , 1976,60:788.

[29] Lindzen R S. Internal gravity waves in an atmosphere with realistic dissipation and temperature, Geophys. Fluid Dyn. ,1970,1;303.

[30] Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц, Механика Сплошных Сред, Гостехиздат(1954). (朗道,栗弗席兹,连续介质力学. 彭旭麟译. 北京:高等教育出版社,第一册(1958),第二册(1960).

[31] Georges T M. Ionospheric effects of atmospheric waves, ESSA Tech. Report IER 57-ITSA 54, U. S. Govt. Printing Office, Washington, D. C. 1967.

[32] Beer T. Atmospheric Waves, London: Adam Hilger. 1975.

[33] Morse P M, Ingard K U. Theoretical Acoustics, McGraw-Hill, 1968;莫尔斯,英格特,理论声学. 杨训仁等译. 北京:科学出版社(1984~1986).

[34] Bergmann P G. The wave equation in medium with a variable index of refraction, J. Acoust. Soc. Amer, 1946, 17:329.

[35] Бреховских Л. М. , Волны В Слоистых Средах, ИЗД АКАН. 1-е изд. 1957; 2-е изд. 1974;布列霍夫斯基赫. 分层介质中的波. 杨训仁译. 北京:科学出版社,第一版. 1960;第二版. 1985.

[36] Wallot J. Der senkrechte Durchgang elektromagntischer Wellen durch eine Schicht räumlich veränderlicher Dielectrizitätskonstante, Ann. Phys. (Leipzig), 1919, 60; 734.

[37] Försterling K. Über die Ausbreitung des Lichtes in inhomogenen Medien, Ann. Phys. (Leipzig), 1931, 11:1.

[38] Forsterling K, Wuster O. On reflection in inhomogeneous media. Ann. Phys. (Leipzig), 1950, 8:129.

[39] Rayleigh Lord. Theory of Sound, 2nd ed . . Dover. 1945.

[40] Рытов С М. и Ф. С. Юдкевич, Об отражении электромагнитных волн от слоя с отрица-тельной диэлектрической постоянной, ЖЭТФ, 1945, 10; 285.

[41] Whittaker E T. , Watson. G. N. Modern Analysis, 4th ed . , Cambridge 1962.

[42] Muskat M, Meres M. W. Reflection and transmission coefficients for plane waves in elastic media. Geophys. ,1940,5:115.

[43] Iamada R. On the radio wave propagation in a stratified atmosphere. J. Phys. Soc. Japan, 1955, 10 ; 71.

[44] Epstein P. Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. ,1930,16:627.

[45] Rawer K. Elektrische Wellen in einem geschichteten Medium. Ann. Phys. (Leipzig), 1939, 35:385.

[46] Burman R, Gould R N. The reflection of waves in a generalized Epstein profile. Can. J. Phys. , 1965,43:921.

[47] Elias G L Das Verhalten elektromagnetischer Wellen bei räumlich veränderlichen elektrischen Eigenschaften. Elecktr. Nachr. Tech. ,1931,8:4.

[48] Potler P S, Murphy S R. Solution of the wave equation in a medium with a particular velocity variation.

J. Acoust. Soc. Amer. ,1962,34:963.

[50] Масеров Е П. К вопросу о волноводном распространении звука в слоистонеоднородных средах, Акуст. Ж. ,1959,5(3):332.

[51] Манжаловский В П. К интегрированию некоторых однородных линейных дифференциальных уравнений вторядка, Изд Харьов Унив,1959.

[52] Miller S C. Good R H. A W K B type approximation to the Schrödinger equation. Phys. Rev. , 1953,91:174.

[53] Fröman N,Fröman P O. JWKB Approximation-Contributions to the Theory. North-Holland Publishing Co. 1965.

[54] Abramowitz M. Stegun I A(eds.). Handbook of Mathematical Functions. Dover, N. Y. 1965.

[55] Фок В А. Таблицы Функций Эйри, М. Г. Т. Т. И. 1946.

[56] Heading J. An Introduction to Phase-integral Methods. Methuen; J. Wiley. 1962.

[57] Дорогницын А А. . Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка, Успехи Мат. Наук, 1952,7:вып. 6.

[58] Murphy E L. Ray representation of diffraction effects in the split-beam sound field. J. Acoust. Soc. Amer. ,1949,43 (3):610.

[59] Бреховских Л М. О поле точечного источника вслоисто-неодной среде,Изв АН СССР. сер. физич. 1949,13 (5):505.

[60] Pierce A D. Acoustics, An Introduction to Its Physical Principles and Applications. New York:McGraw-Hill. 1981; Amer. Inst. of Physics, New York,1991.

[61] Cagniard L. Réflexion et réfraction des ondes séismiques progressive. Gauthier-Villars, Paris, 1939.

[62] Milne E A. Sound Waves in the atmosphere. Phil. Mag. ,1921,6(42):96.

[63] Jaeger G. On the propagation of sound in moving fluid, Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss. (Vienna), Math-Naturwiss. Kl. sec. Πa, 105:1040.

[64] Barton E H. On the refraction of sound by wind. Phil. Mag. , 1901,6(1):159.

[65] Fujiwhara S. On the abnormal propagation of sound waves in atmosphere. Bull. Cent. Meteorol. Obs. Japan,1912,1(2);1916,4(2).

[66] Hamming R W. Numerical solution of ordinary differential equations, in Digital Computer User's Handbook (ed. Klerer M and Korn G A), New York:McGraw-Hill. 1967.

[67] Moler C B,Solomon L P. Use of splines and numerical integration in geometrical acoustics. J. Acoast. Soc. Amer. ,1970,48:739.

[68] Whitham G B. Group velocity and energy propagation for three-dimensional waves. Common. Pure Appl. Math. ,1961,14:675.

[69] Engelke R. Ray trace acoustics in unsteady inhomogeneous flow. J. Acoust. Soc. Amer. , 1974,56:1291.

[70] Ugincius P. Ray acoustics and Fermat's principle in a moving inhomogeneous medium. J. Acorst. Soc. Amer. ,1972,51:1759.

[71] Tedrick R N. Meteorological focusing of acoustic energy. Sound:Its Uses and Control,1963,2 (6):24.

[72] Hayes W D. Round table discussion on sonic boom problems. Aircraft Engine Noise und Sonic Boom, AGARD Conf. Proc. ,1969,42:36.

[73] Hall S-L V. Distortion of the sonic boom pressure signature by high-speed jets. J. Acoust. Soc.

Amer. , 1978, 63: 1749.

[74] Gutenberg B. Propagation of sound waves in the atmosphere. J. Acoust. Soc. Amer. ,1942, 14:151.

[75] 杨训仁. 平面声波在运动分层介质中的反射和折射. 声学学报,1982,7(2) :110.

[76] Cook R K. Strange sounds in the atmosphere, Part 1 and Part 2 (with J. M. Young), Sound: Its Uses and Control, 1962, 1: 12~16, 25~33.

[77] Cox E F. Abnormal audibility zones in long distance propagation through the atmosphere. . J. Acoust. Soc. Amer. ,1949, 21: 6~16, 501.

[78] Gutenberg B. In Compendium of Meteorology. American Meteorological Society, Boston. (ed. T. F. Malone) 1951.

[79] Hayes W D. Energy invariant for geometric acoustics in a moving medium. Phys. Fluids, 1968, 11: 1654.

[80] Блохинцев Д. Акустика Неоднородой Движущейся Среды. огизгостехиздат, 1946.

[81] Atvars J, Schubert L K, Ribner H S. Refraction of sound from a point source placed in an air jet. J. Acoust. Soc. Amer. ,1965, 37: 168.

[82] Schubert L K. Numerical study of sound refraction by a jet flow, I: Ray acoustics. J. Acoust. Soc. Amer. ,1972, 51: 434.

[83] Bateman H. The influence of meteorological conditions on the propagation of sound. Mon. Weather Rev. , 1914, 42: 258.

[84] Attenborough K, Hayek S I, Lawther J M. Propagation of sound above a porous half-space. J. Acoust. Soc. Amer. ,1980, 68: 1493.

[85] Sabatier J M, Bass H E. Bolen L N K. Attenborough and V. V. S. S. Sastry, The interaction of airborne sound with the porous ground the theoretical formulation, J. Acoust. Soc. Amer. , 1986, 79: 1345.

[86] Paul D I. Acoustical radiation from a point source in presence of two media. J. Acoust. Soc. Amer. , 1957, 29: 1102.

[87] Paul D I. Wave Propagation in acoustics using the saddle point method. J. Math. Phys. ,1959, 38: 1.

[88] Piercy J E, Embleton T F W, Sutherland L C. Review of noise propagation in the atmosphere. J. Acoust. Soc. Amer. ,1977, 61: 1403.

[89] Parkin P H, Scholes W E. The horizontal propagation of sound from a jet engine close to the ground. at Radlett. J. Sound Vib. ,1964, 1: 1.

[90] Attenborough K. Acoustical impedance models for outdoor ground surfaces. J. Sound Vib. , 1985, 99: 521.

[91] Delany M E, Bazley E N. A Note on the effect of ground absorption in the measurement of aircraft noise. 1971, J. Sound Vib. , 16: 315.

[92] Chessel C I. Propagation of noise along a finite impedance boundary. J. Acoust. Soc. Amer. , 1977, 62 : 825.

[93] Morse P M. Feshbach H. Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, 1953.

[94] Isei T, Embleton T F W, Piercy J E. Noise reduction by barriers on finite impedance ground. J. Acoust. Soc. Amer. , 1980, 67: 46.

[95] Daigle G A. Diffraction of sound by a noise barrier in presence of atmospheric turbulence. J. Acoust. Soc. Amer. , 1982, 71: 847.

[96] Price M A. Attenborough K. , Heap N. W. . Sound attenuation through trees: Measurements and mod-

els. J. Acoust. Soc. Amer. ,1988,84:1836.

[97] Senior T B A. Low-frequency scattering, J. Acoust. Soc. Amer. ,1973,53:742.

[98] Clay C S,Medwin H. Acoustical Oceanography:Principles and Applications. New York:Wiley. 1977.

[99] Tatarskii V I. The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation J. W. Strohbehn 英译. Jerusalem:Israel Program for Scientific Translations. 1971.

[100] Brown E H. Acoustic Doppler radar scattering equation and general solution. J. Acoust. Soc. Amer. , 1972,52: 1391.

[101] Brown E H,Clifford S F. Spectral broadening of an acoustic pulse propagating through turbulence. J. Acoust. Soc. Amer. ,1973,54:36.

[102] Clifford S F,Brown E H. Acoustic scattering from a moving turbulent medium. J. Acoust., Soc. Amer. ,1974,55:929.

[103] Huang M N. Sound scattering from atmospheric turbulence. Progr. Astronaut. Aeronaut., 1976, 46:35.

[104] Ford G W,Meecham W C. Scattering of sound by isotropic turbulence of large Reynolds number. J. Acoust. Soc. Amer. ,1960,32:1668.

[105] Brown E H. Turbulent spectral broadening of backscattered acoustic pulses. J. Acoust. Soc. Amer. , 1974,56:1398.

[106] Lewis R M,Bleistein N,Ludwig D. Uniform asymptotic theory of creeping waves. Commun. Pure Appl. Math. ,1967,20:295.

[107] 杨训仁. 运动分层介质中脉冲点声源的衍射场. 中国科学院研究生毕业论文,1964;或见声学学报, 1965,2(2):56.

[108] Friedlander F G. Sound Pulses. Cambridge,1958.

[109] Pridmore-Brown D C. Sound propagation in a temperature and wind-stratified medium. J. Acoust. Soc. Amer. 1962,34:438.

[110] Watson G N. Theory of Bessel Functions, 2nd ed., Cambridge, 1952.

[111] Miller J C P. British Association Mathematical Tables. Part-vol. B: The Airy Integral, Cambrideg, 1946.

[112] Bauer H. J.. Influences of transport mechanisms on sound propagation in gases. Adv. Mol. Relaxation Processes,1972,2:319.

[113] Evans L. B., Sutherland L. C.. Absorption of sound in air. Wyle Res. Rep. No. WR 70-14. for U. S. Army Res. Off. 1970.

[114] Hirschfelder K. F., Curtiss C. F., Bird R. B.. Molecular Theory of Gases and Liquids. New York: Wiley. 1954.

[115] Cottell T L,McCoubrey J C. Molecular Energy Transfer in Gasses. London:Butherworth. 1961.

[116] Bass H E, Sutherland L C. Piercy J., Evans L. Absorption of sound by the atmosphere. Physical Acoustics, Vol. XVII, 145~232, Academic Press,1984.

[117] Bhatia A B. Ultrasonic Absorption. London:Oxford Univ. Press. 1967.

[118] Raff L M, Winter T G. Origin of the temperature dependence of the "rotational relaxation" time. J. Chem. Phys. ,1968,48:3992.

[119] Bauer H-J,Bass H E. On acoustic measurements of rotational energy transfer. J. Chem. Phys. ,1972, 57:1763.

[120] Greenspan M J. Rotational relaxation in nitrogen, oxygen and air. J. Acoust. Soc. Amer., 1959, 31:155.

[121] Bauer H-J. Phenomenological theory of the relaxation phenomena in gases. Physical, Acoastics. Vol. II A, 47~131, Academic Press. 1965.

[122] Tempest W, Parbrook H O. The absorption of sound in argon, nitrogen and oxygen. Acustica, 1957, 7:354.

[123] Bass H E, Keeton R G. Ultrasonic absorption in air elevated temperatures. J. Acoust. Soc. Amer., 1975, 58:110.

[124] Bass H E, Sutherland L C. On the rotational collision number for air at elevated temperatures. J. Acoust. Soc. Amer., 1976, 59:1317.

[125] Evans L B, Sutherland L C. Absorption of sound in air. J. Acoust. Soc. Amer., 1971, 49:110(A).

[126] Evans L B, Bass H E, Sutherland L C. Atmospheric absorption of sound: Theoretical predictions. J. Acoust. Soc. Amer., 1972, 51:1565.

[127] Bauer H J, Shields F D, Bass H E. Multimode vibrational relaxation in polyatomic molecules. J. Chem. Phys., 1972, 57:4624.

[128] Shields F D. On obtaining transition rates from sound absorption and dispersion curves. J. Acoust. Soc. Amer., 1970, 47:1262.

[129] Bass H E, Bauer H-J, Evans L B. Atmospheric absorption of sound: Analytical expressions. J. Acoust. Soc. Amer., 1972, 52:821.

[130] Holman J P. Thermodynamics. New York: McGraw-Hill. 1969.

[131] U. S. Standard Atmosphere, Washington D. C: U. S. Gov. Print. Off., 1962.

[132] Gray D E. (ed.). American Institute of Physics Handbook. 3rd ed. New York: McGraw-Hill. 1972.

[133] Henderson M C, Herzfeld K F. Effect of water vapor on the Napier frequency of oxygen and air. J. Acoust. Soc. Amer., 1965, 37:986.

[134] Monk R G. Thermal relaxation in humid air. J. Acoust. Soc. Amer., 1969, 46:580.

[135] Bass H E, Shields F D. Vibrational relaxation and absorption in O_2/H_2O mixtures. J. Acoust. Soc. Amer., 1974, 56:856.

[136] Schwartz R N, Slawsky Z I, Herzfeld K. F.. Calculation of vibrational relaxation times in gases. J. Chem. Phy., 1952, 20:1591.

[137] Evans L B. Vibrational relaxation in moist nitrogen. J. Acoust. Soc. Amer., 1972, 51: 409.

[138] Zuckerwar A J, Meredith R W. Sound absorption in N_2-H_2O gas mixtures at elevated temperatures. J. Acoust. Soc. Amer., 1980, 68:S107.

[139] Bass H E, Hottman S D, Bauer H-J. Laser induced fluorescence study of the deactivation of N_2 by H_2O, H_2S and CH_4. J. Chem. Phys., 1980, 72:2113.

[140] Bass H E, Shields F D. Absorption of sound in air: High frequency measurements. J. Acoust. Soc. Amer., 1977, 61:571.

[141] Sutherland L C. Review of experimental data in a support of a proposed new method for computing atmospheric absorption loss. U. S. Dep. Transp. Rep. 1975, No. TST—75—87.

[142] Goff J A. Saturation pressure of water on the new Kelvin scale, Fundamentals and Standards of Humidity and Moisture: Measurement and Control in Science and Industry, V 3, 1965, Chap. 7, New York: Reinhold. 1965.

[143] List R J(ed.). Smithsonian Meteorological Tables, 6th Rev. ed.. Smithsonian Washington D. C. :Inst. Press. 1958.

[144] Jaeschke M, Heller W J, Meier G E A. Acoustic damping in a gas mixture with suspended submicroscopic droplets. J. Sound Vib., 1975, 43: 467.

[145] Wei R J, Tian Y R, Lu Q J. Absorption of sound in water fog composed of submicron droplets. J. Acoust. Soc. Amer., 1987, 81 (5): 1350.

[146] Marble F E, Wooten D C. Sound attenuation in a condensing vapor. Phys. Fluids, 1970, 13: 2657.

[147] Cole J E III, Dobbins R A. Propagation of sound through atmospheric fog. J. Atmos. Sci., 1970, 27: 426.

[148] Cole J E III, Dobbins R A. Measurements of the attenuation of sound by a warm air fog. J. Atmos. Sci., 1971, 28: 202.

[149] Davidson G A. Sound propagation in fog. J. Atmos. Sci., 1975, 32: 2201.

[150] Davidson G A. Barger's equation for finite amplitude acoustics in fogs. J. Sound Vib., 1976, 45: 473.

[151] Davidson G A. Propagation of audible sound througb air-water fog. J. Acoust. Soc. Amer., 1977, 62: 497.

[152] Knudsen V O, Wilson J V, Anderson N S. The attenuation of audible sound in fog and smoke. J. Acoust. Soc. Amer., 1948, 20: 849.

[153] Wei R J, Wu J R. Ahsorption of sound in water fog. J. Acoust. Soc. Amer., 1981, 70: 1213.

[154] Hines C O. Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights. Can. J. Phys., 1960, 38: 1441.

[155] Lamb H. Hydrodynamics, 6th ed.. New York: Dover. 1945.

[156] Martyn D F. Cellular atmospheric waves in the ionosphere and troposphere. Proc. Roy. Soc., A, 1950, 201: 216.

[157] Tolstoy I. The theory of waves in stratified fluids including the effects of gravity and rotation. Rev. Mod. Phys., 1963, 35: 207.

[158] Jones W L. Energy momentum tensor for linearized waves in material media. Rev. Geophys. Space Sci., 1971, 9: 917.

[159] Beer T. Lamb waves and the conservation of energy. Am. J. Phys., 1972, 40: 774.

[160] Midgley J E, Liemohn H B. Gravity waves in a realistic atmospbere. J. Geophys. Res., 1966, 71: 3729.

[161] Eckart C. Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres. New York: Pergamon Press. 1960.

[162] Rossby C G. Planetary flow pattern in the atmosphere. Q. J. Roy. Met. Soc. Supplement, 66: 68(1940).

[163] Platzman G. Tbe Rossby wave. Q. J. Roy. Met. Soc., 1968, 94: 225.

[164] Garrett C J R. Atmospheric edge waves. Q. J. Roy. Met. Soc., 1969, 95: 731.

[165] Pitteway M L V, Hines C O. The reflection aod ducting of atmospheric acoustic gravity waves. Can. J. Phys., 1965, 43: 2222.

[166] Johnston T W. Atmospheric gravity wave instability. J. Geophys. Res., 1967, 72: 2972.

[167] Clemmow P C, Dougberty J P. Electrodynamics of Particles and Plasmas. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969.

[168] Scover R S. Gravity waves in the atmospbere. Arch. Wet. Geophys. Biokl., A, 1953, 4: 176.

[169] Fogle B, Haurwitz B. Noctilucent clouds. Space Sci. Rev., 1966, 6: 279.

[170] Jones D, Maude A D. Evidence for wave motions in the E region in the ionosphere. Nature, 1965, 206: 177.

[171] Thome G D. A study of large scale traveling disturbances in the ionosphere using the Arecibo UHF radar. Report CRSR 236. Cornell Univ., Ithaca, 1966.

[172] Lindzen R S, Blake D.. Lamb waves in the presence of realistic distributions of temperature and dissipation. J. Geophys. Res., 1972, 77: 2166.

[173] Bretherton F P. Lamb waves in a nearly isothermal atmosphere. Q. J. Roy. Met. Soc., 1969, 95: 754.

[174] 谢金来,杨训仁. 美国航天飞机"挑战者号"爆炸时所产生的次声波. 声学学报, 1986, 11(3): 189. Yang Xun-Ren, Xie Jin-Lai. Detection and analysis of the infrasonic waves attached to the tragic explosion of U. S. space shuttle"Challenger". J. Low Freq. Noise Vib., 1986, 5: 100.

[175] Phillips N A. The equations of motion for a shallow rotating atmosphere and the traditional approximation. J. Atmos. Sci., 1966, 23: 626.

[176] Chapman S, Lindzen R S. Atmospheric Tides. D. Reidel, Dordrecht 1970.

[177] Salomons E M. Computational Atmospheric Acoustics. Kluwer London: Acad. Publ. 2001.

[178] Nobile M A, Hayek S I. Acoustic propagation over an impedance plane. J. Acoust. Soc. Amer., 1985, 78: 1325.

[179] Raspet R, Franke S J. Residue series solution of impulse noise propagation into a shadow zone. J. Acoust. Soc. Amer., 1988, 83: 1964.

[180] Hallberg B, Larsson C, Israelsson S. Numerical ray tracing in the atmospheric surface layer. J. Acoust. Soc. Amer., 1988, 83: 2059.

[181] Bass H E. Atmospheric acoustics. In Encyclopedia of Applied Physics, VCH Publishers Inc. 1991, 2: 145.

[182] Jensen F B, Kuperman W A. Porter M. B., Schmidt H.. Computational Ocean Acoustics. New York: Amer. Inst. of Physics. 1994.

[183] Walkden F, West M. Prediction of enhancement factor for small explosive soures in a stratified moving atmosphere. J. Acoust. Soc. Amer., 1988, 84 (1): 321.

[184] Raspet R., Lee S. W., Keuster E., Chang D. C., Richards W. F., Gilbert R. N Bong. A Fast Field Program for sound propagation in a layered atmosphere above impedance ground. J. Acoust. Soc. Amer., 1985, 77: 345.

[185] Lee S W, Bong N, Richards W F, Raspet R. Impedance formulation of the Fast Field Program for acoustic wave propagation in the atmosphere. J. Acoust. Soc. Amer., 1986, 79: 628.

[186] West M, Sack R A, Walkden F. The Fast Field Program (FFP). A second tutorial: application to long range sound propagation in the atmosphere. Applied Acoustics, 1991, 33: 199.

[187] Raspet R, Lee S W, Kuester E, Chang D C, Richards W F, Gilbert R, Bong N. A fast-field program for sound propagation in a layered atmosphere above an impedance ground. J. Acoust. Soc. Amer., 1985, 77: 345.

[188] Lee S W, Bong N, Richards W F, Raspet R. Impedance formulation of the fast-field program for acoustic wave propagation in the atmosphere. J. Acoust. Soc. Amer., 79: 628-(1986). J. Acoust. Soc. Amer., 1986, 79: 628.

[189] Nijs L. Wapenaar C P A. The influence of wind and temperature gradients on sound propagation, calculated with the two-way wave equation. J. Acoust. Soc. Amer., 1990, 87: 1987; 亦见 J. Acoust. Soc. Amer., 1992, 91: 498.

[190] Wilson D K. Sound field computations in a stratified moving medium. J. Acoust. Soc. Amer., 1993,

94:400.

[191] Wilson D K. Propagation in a stratified atmosphere and solution with the FFP-L program. Internal Riport. The Pennsylvania State Univ. 1990.

[192] West M, Sack R A, Walkden F. The fast field program (FFP). A second tutorial: application to long range sound propagation in the atmosphere. Applied Acoustics, 1991. 33:199.

[193] Filippi P, Habault D, Lefebvre J P, Bergassoli A. Acoustics. Besic physics. theory and methods. San Diego: Academic. 1999.

[194] Myers M K, McAninch G L. Parabolic approximation for sound propagation in the atmosphere. AIAAJ. , 1978, 16: 836.

[195] Tappert F D, Lee D A range refraction parabolic equation. J. Acoust. Soc. Amer. , 1984, 76: 1797.

[196] Gilbert K E, White M J. Application of the parabolic equation to sound propagation in a refraction atmosphere. J. Acoust. Soc. Amer. , 1989, 85: 630.

[197] Di X, Gilbert K E. Wave propagation in a 3-D turbulent atmosphere: horizontal coherence. Proc. Eighth Symposium on Long-Range Sound Propagation, Pennsylvania: The Pennsylvania State Univ. , 1998: 169.

[198] Chen C, Liu Y, Lee D. A three dimensional azimuthal wide-angle model for the parabolic wave equation. J. Comp/ Acoust. , 1999, 7: 269.

[199] Davis J A, White D, Cavanaugh R C. In NORDA parabolic equation workshop (ed. J. A. Davis, D. White and R. C. Cavanaugh). NORDA TN-143, Naval Ocean Research and Development Activity, Bay St. Louis, MS, 1982.

[200] Claerbout J F. Fundamentals of Geophysical Data Processing, New York: McGraw-Hill. 1976; Oxford: Blackwell. 1985.

[201] Knightly G H, Lee D, Mary D F St. A higher-order parabolic wave equation. J. Acoust. Soc. Amer. , 1987, 82: 580.

[202] West M, Gilbert K, Sack R A. A tutorial: on the parabolic equation (PE) model used for long range sound propagation in the atmosphere. Applied Acoustics, 1992, 37: 31.

[203] Press W H, Flannery B P, Teukolsky S A, Vetterling W T. Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Cambridge: Cambridge U. P. , 1986.

[204] Salmons E M. Improved Green's function parabolic equation method for atmospheric sound propagation. J. Acoust. Soc. Amer. , 1998, 104: 100.

[205] Berkhout A J. Applied Seismic Wave Theory. Advances in Exploration Geophysics, Amsterdam: Elsevier. 1987.

[206] Gilbert K E, Di X. A fast Green's function method for one-way sound propagation in the atmosphere. J. Acoust. Soc. Amer. , 1993, 94: 2343.

[207] 杨训仁. 台风次声的射线寻迹. 声学学报, 1981, 6(1): 1~8.

Yang Xunren. Ray tracing for infrasonic waves generated by typhoon. Chinese J. Acoust. , 1984, 3 (2): 183.

[208] Gossard E E, Hooke W H. Waves in the Atmosphere. Elsevier Scient. Publ. Co. 1975.

[209] Georges T. M. , 3-D ray tracing for acoustic-gravity waves. Proc. Conf on Effects of Acoustic Gravity Waves on Electromagnetic Wave Propagation. AGRD Proc. 1972, 115: 2-1 to 2-8 .

[210] Pierce A D, Posey J W. Theoretical predictions of acoustic-gravity pressure waveforms generated by

large explosions in the atmosphere. Air Force Camb. Res. Lab. , AFCRL-70-0134, 1970.

[211] Cerveny V, Popov M, Pšenčík I. Computation of wave fields in inhomogeneous media-Gaussian beam approach. Geophys. J. R. Astron. Soc. ,1982,70: 109.

[212] Porter M B, Bucker H P. Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields. J. Acoust. Soc. Amer. ,1987,82:1349.

[213] Porter M B, Bucker H P. Applications of Gaussian beam tracing to 2 and 3D problems in ocean acoustics, Proc. of the 12th World Congress on Scientific Computation (ed. W. F. Ames and C. Brezinski), (Pairs:MACS.), 1988:227.

[214] Weber M. Computation of body-wave seismograms in absorbing 2-D media using the Gaussian beam method: Comparison with exact methods. Geophys. J. ,1988,92:9.

[215] Gabillet Y, Schroeder H, Daigle G A, L'Espérance A. Application of the Gaussian beam approach to souod propagation in the atmosphere: Theory and experiments, J. Acoust. Soc. Amer. , 1993, 93 (6):3105.

[216] Muller G. Efficient calculation of Gaussian-beam seismograms for two-dimensional inhomogeneous media. J. R. Astron. Soc. ,1984,79:153.

[217] Coulter R L, Kallistratova M A. Two decades of progress in SODAR techniques: a review of 11 ISARS proceedings. Meteorology and Atmospheric Physics. Austria: Springer-Verlag . 2004, 85: (1～3): 3～19.

[218] Ulyanov Y N, Butakova S V. Sonic antennas for acoustic and radio-acoustic remote sensing. 4th International Conference on Antenna Theory and Techniques. 2003,2(2):564～569.

[219] Bradley S, Webb T. Use of an ultrasonic sodar to sense raindrop size distributions. Source : Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 2002, 19(8):1203～1207

[220] Kallistratova M A, Coulter R L. Application of SODARs in the stody and monitocing of the environment . Meteorology and Atmospheric Physics . Austria: Springer-Verlag . 2004, 85(1～3). 21 ～37.

[221] McAllister L G. Acoustic sounding of the lower troposhere. J. Atmos. Terr. Phys. ,1968,30:1439.

[222] Asimakopoulos D N, Stefanou G, Helmis C D. Atmospheric acoustic minisounder. J. Atmospheric Oceanic Tech. ,1987,4:345.

[223] Coulter R L, Martin T J, Hart R L. A battery-powered minisodar for long-and short-term operations. International J. Remote Sensing, 1992,15:245

[224] Mursch-Radlgruber E, Gregg D W, King C W, Ruiffieux D, Sharp K A H, Wolfe D E, Neef W D. NOAA's protable high frequency minisodar-design and first results. International J, Remote sensing. , 1992,15:325.

[225] Moulsley T J, Cole R S. High frequency atmospheric acoustic sounders. Atmospheric Environment, 1979,13:347.

[226] Carsey F A. A linear zipper array for probing the wind and structure profile of the lower atmosphere (abstract). J. Acoust. Soc. Amer. ,1972,52:1309.

[227] Davey R F. A coherent acoustic Doppler radar for real-time wind measurement. In Preprints of the 17th Radar Mateorology Conference, Boston: Amer. Meteor. Soc. ,1976:270～275.

[228] Kaimal J C, Wescott J W. An acoustic Doppler sounder for measuring wind profiles in the lower boundary layer. In Preprints of the 17th Radar Meteorology Conference, 290～296, Boston, Mass: Amer. Meteor. Soc. 1976.

[229] Georges T M, Clifford S. F. Acoustic sounding in a refracting atmosphere. J. Acoust. Soc. Amer., 1972, 52: 1397.

[230] Neff W D. Quantitative evaluation of acoustic echos from the planetary boundary layer. Tech. Rep. ERL 332-WPL, 38; 34 NOAA, Boulder, Colo. 1975.

[231] Asimakopoulos D N, Helmis C G. Recent advances on atmospheric acoustic sounding, International J. Remote Sensing, 1994, 15; No. 2, 223.

[232] Eymard L. Ondes de gravite dans la couche limite planetaire etude experimenta par sondage acoustique. Tech. Note No. 54, France; Centre National d'etudes des Telecommunications. 1978.

[233] Caughey S J, Readings C J. An observation of waves and turbulence in the earth's boundary layer. Boundary layer Meteorology, 1975, 9: 279.

[234] Caughey S J. The Cardington turbulence instrumentation. Unpublished UK Meteorological Office Turbulence and Diffusion Note, No. 82 (1977).

[235] Haugen D A, Kaimal J C, Readings C J, Rayment R. A comparison of ballon-borne and tower-mounted instrumentation for probing the atmospheric boundary-layer. J. Appl Meteor., 1975, 14: 540.

[236] Little C G. Acoustic methods for the remote probing of the lower atmosphere. Proc. IEEE, 1969, 57: 571.

[237] Gething J T, Jensen D. Measurement of temperature and humidity by acoustic echo sounding. Nature (Phys. Sci.), 1971, 231: 198.

[238] Bradley S G, Hunerbein S. v.. A systematic algorithm for obtaining SODAR wind profiles. Meteorology and Atmospheric Physics. Austria: Springer-Verlag, v 85, 2004, 85(1~3): 77~84.

[239] Rodgers C D. Inverse methods for atmospheric sounding, Theory and practice. London: World Scientific, 2000.

[240] Few A A. Lightning channel reconstruction from thunder measurements. J. Geophys. Res., 1970, 75: 7517.

[241] Few A A. Power spectrum of thunder. J. Geophys. Res., 1969, 74: 6926.

[242] Teer T. L., Few A. A.. Horizontal lightning. J. Geophys Res., 1974, 79: 3436.

[243] Barry G. Ray tracings of acoustic waves in the upper atmosphere. J. Atmos. Terr. Phys., 1963, 25: 621.

[244] Georges T M, Beasley W H. Refraction of infrasound by upper atmospheric winds. J. Acoust. Soc. Amer., 1977, 61: 28.

[245] Jones R M, Riley J P, Georges T M. HAPPA-a versatile three dimensional Hamiltonian ray-tracing program for acoustic waves in the atmosphere above irregular terrain. NOAA Report, Boulder, Colo. 1986.

[246] Pierce A D. Propagation of acoustic-gravity waves in a temperature and wind-stratified atmosphere. J. Acoust. Soc, Amer., 1965, 37: 218.

[247] Francis S H. Global propagation of atmospheric gravity waves: a review. J. Atmos. Terr. Phys., 1975, 37: 1011.

[248] Jones R M, Georges T M. Infrasound from convective storms: III. Propagation to the ionosphere. J. Acoust. Soc. Amer., 1976, 59: 765.

[249] Francis S H. Acoustic-gravity modes and large-scale traveling ionospheric disturbances of a realistic dissipative atmosphere. J. Geophys. Res. 1973, 78: 2278.

[250] Donn W L, Rind D. Microbaroms and the temperature and wind of the upper atmosphere. J. Atmos, Sci., 1972, 29: 156.

[251] Georges T M. HF Doppler studies of traveling ionospheric disturbances. J. Atmos. Terr. Phys., 1968, 30: 735.

[252] Derr V E(ed.). Remote Sensing of tine Troposphere. Chap, 21, U. S. Govt. Printing Off. 1972.

[253] Briggs B. H., Phillips G. S., Shinn D. H.. The analysis of observations on spaced receivers of fading radio signals. Proc. Phys. Soc. London, B, 1950, 63; 106.

[254] Gossard E E. The apparent movement of the spectral components in fading records of ionospherically reflected radio waves. J. Geophys. Res., 1967, 73: 1563.

[255] Hedlin M A H. Global monitoring of subaudible sound in Earth's atmosphere. Oceans, 2003, 1(1); 55~60.

[256] Garces M, Hetzer C, Lindquist K, Hansen R, Drob D, Picone M. Stratospheric arrivals in the upstream wind direction: case study of the April 23, 2001, bolide, The Infrasound Technology Workshop, Kona, Hawaii.

[257] Takahashi K, Masuda Y, Matura N, Kato S, Fukao S, Tsuda T, Sato T. Analysis of acoustic wave fronts in the atmosphere to profile the temperature and wind with a radio acoustic sounding system. J. Acoust. Soc. Amer., 1988, 84: 1061.

[258] Kallistratova M A. Acoustic waves in the turbulent atmosphere: a review. Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 2002, 19 (8): 1139.

[259] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves, New York: John Wiley & Sons. 1974

[260] 马大猷. 现代声学理论基础. 北京:科学出版社. 2004.

[261] 钱祖文. 非线性声学. 北京:科学出版社. 1992.

[262] Landau L D. On shock waves at large distances from the place of their origin. Soviet J. Physics, 1945, 9: 496.

[263] Anderson M O. The propagation of the spherical N wave in an absorbing medium and its diffraction by a circular aperture. Tech. Report ARL 74-25, Univ. Texas. 1974.

[264] Kang J. Nonlinear acoustic propagation of shock waves through the atmosphere with molecular relaxation, Ph. D thesis. Pennsylvania State Univ. 1991.

[265] Plotkin K J. PCBoom3 sonic boom prediction model version 1.0e, Wyle Research Report WR 95-22E, 1998.

[266] Plotkin K J. State of the art of sonic boom modeling. J Acoustical Society of America. 2002, 111(1): 530.

[267] Friedman M P, Kane E J, Sigalla A. Effects of atmosphere and aircraft motion on the location and intensity of a sonic boom. AIAAJ. 1963, 1(6): 1327.

[268] Thomas C L. Extrapolation of sonic boom pressure signatures by the waveform parameter method. NASA, TN. D-6832.

[269] Carlson H W. Simplified sonic boom prediction. NASA Technical Paper 1122, 1978.

[270] Petenko I V, Shurygin E A. A two-regime model for the probability density function of the temperature structure parameter in the convective boundary layer. Bound.-Layer Meteor., 1999, 93: 381~394.

[271] Neff W. Quantitative evaluation of acoustic echoes from the planetary boundary layer. NOAA Tech. Rep. ERL 322-WPL, 34, 1975.

[272] Singal S P, Gera B S, Kallistratova M. A., Petenko I. V.. Sodar aspect sensitivity studies in the convective boundary layer. Int. J. Remote Sens., 1997, 18: 1809~1819.

[273] Petenko I V, Bezverkhnii V A. Temporal scales of convective coherent structures derived from sodar

data. Meteor. Atmos. Phys., 1999, 71: 105~116.

[274] Wilson D K. Scattering of acoustic waves by intermittent temperature and velocity fluctuations. J. Acoust. Soc. Amer., 1997, 101: 2980~2982.

[275] Chunchuzov I P, Otrezov A I, Sound propagation in the atmospheric boundary layer. Proc. Eighth Int. Symp. on Acoustic Remote Sensing, Moscow, Russia, ISARS, 1996, 1. 1~1. 12.

[276] Tsuda T, Sato N, Hirose K, Kato S. MU Radar observations of the aspect sensitivity of backscattered VHF echo power in the troposphere and lower stratosphere. Radio Sci., 1986, 21: 971~980.

[277] Bush G. A., Kulichkov S. N., Svertilov A. I., Some results of experiments on sound scattering by anisotropic inhomogeneities in the middle atmosphere. Izv. Russ. Acad. Sci., Atmos. Oceanic Phys., 1997, 33: 445~452.

[278] Kulichkov S N. Acoustic sounding of inhomogeneous structures in the middle atmosphere. Izv. Russ. Acad. Sci., Atmos. Oceanic Phys., 1998, 34: 5~11.

[279] Ono H. 'Algebraic SolitaryWaves in Stratified Fluids', J. Phys. Soc. Japan, 1975, 39: 1082~1091.

[280] Menhofer A, Smith R K, Reeder M J, Christie D R. 'Morning-Glory Disturbances and the Environment in which They Propagate', J. Atmos. Sci. 1997, 54: 1712~1725.

[281] Doviak R J, Chen S S, Christie D R. 'A thunderstorm-generated solitary wave observation compared with theory for nonlinear waves in a sheared atmosphere', J. Atmos. Sci, 1991, 48: 87~111.

[282] Rees J M, Rottman J W. Analysis of solitary disturbances over an antarctic ice shelf. Boundary-Layer Meteorol, 1994, 69: 285~310.

[283] Christie D R, Muirhead K J, Clarke R H. 'Solitary waves in the lower atmosphere'. Nature 1981, 293: 46~49.

[284] Cheung T K, Little C G. Meteorological tower, microbarograph array, and sodar observations of solitary-like waves in the nocturnal boundary layer. J. Tmos. Sci., 1990, 47: 2516~2536.

[285] Rao M P Castracane P, Casadio S, Fua D, Fiocco G. Observations of atmospheric solitary waves in the urban boundary layer. Boundary-Layer Meteorology, 2004, 111 (1): 85.

[286] Arendt S, Fritts D C. Acoustic radiation by ocean surface waves. Journal of Fluid Mechanics, 2000, 415 (25): 1.

[287] Posmentier E. A theory of microbaroms. Geophys. J. R. Astrn. Soc, 1967, 13: 487~501.

[288] Donn W L, Posmentier E. Infrasonic waves from the marine storm of April. 7 1966. J. Geophys. Res., 1967, 72: 2053~2061.

[289] Rind D. Microseisms at Palisades 3. Microseims and microbaroms. J. Geophys. Res, 1980, 85: 4854~4862.

[290] Dowling A P, Ffowcs Williams J E. Sound and Sources of Sound. Ellis Horwood: 1983.

[291] Ostrovsky L A. On generation of infrasound by large objects falling into water. IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium., 2002, 22: 873~875.

[292] Cetegen B M, Ahmed T A. Experiments on the periodic instability of buoyant plumes and pool fires. Combustion and Flame, 1993, 93: 157~184.

[293] Bedard A, Nishiyama R T. Infrasound generation by large fires: experimental results and a review of an analytical model predicting dominant frequencies. IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium,. 2002, 2: 876~878.

[294] Gaydon A G, Wolfhard H G. Flames, their structure, radiation and temperature, 4th ed.. London:

Chapman and Hall. 1979; Toeppler A. Ann. Phys. ,Leipzig. 1866,128:126.

[295] Drysdale D. An Introduction to Fire Dynamics. Chichester: A Wiley Interscience. 1985.

[296] 杨训仁. 山背波:对飞机的潜在威胁. 应用声学,1995,14(4):28.

[297] Bedard Jr. Atmospheric turbulence aloft: A review of possible methods for detection, warning and validation of prediction models. AIAA 93~0847, 31st Aerospace Sci. Meeting & Exhibit. 1993.

[298] Nishiyama R T, Bedard A J, Kirschner Jr, Strong A L. Winds over mountains and infrasound: possible applications for detecting regions related to aircraft turbulence reports. 2002 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2002, 2(2): 879~881.

[299] Kessler E. Thunderstorms. U. S. Govt. Printing Off. 1982, 3: 117.

[300] Xie Jin lai, Yang Xun-ren, Li Ying-bo, Li Qi-tai. On the correlativity between atmospheric gravity waves and various weather phenomena. J. Low Freq. Noise Vib. ,1988, 7(4): 142.

[301] Afraimovich E L, Kosogorov E A, Plotnikov A V. Shock-acoustic waves generated during rocket launches and earthquakes. Cosmic Research, 2002, 40(3): 241.

[302] 李启泰,谢金来,杨训仁. 日环食激发大气声重力波的研究. 声学学报,1992,17(3):171.

[303] Balachandran N K, Donn W L. Concorde sonic booms as an atmospheric probe. Science, 1977, 197: 47.

[304] Crary A P. Stratosphere winds and temperatures from acoustical propagation studies. J. Meteorol. , 1950, 7: 233.

[305] Crary A P, Bushnell V. C. Determination of high altitude winds and temperatures in the Rocky Mountain area by acoustic soundings. October 1951, J. Meteorol. , 1955, 12: 463.

[306] Donn W L, Shaw D M. Exploring the atmosphere with nuclear explosions. Rev. Geophys. , 1967, 5: 53.

[307] MacKinnon R F. Effects of winds on atmospheric pressure waves produced by hydrogen bombs. J. Meteorol. Soc. Japan, 1968, 46: 45.

[308] Meecham W C. Effects of atmospheric wind structure on shorter-period nuclear-generated infrasound. J. Geophys. Res. , 1968, 73: 377.

[309] Row R V. A coustic-gravity waves in the upper atmosphere due to a nuclear detonation and an earthquake, J. Geophys. Res, 1967, 72: 1599.

[310] Baker D M, Davies K. Waves in the ionosphere produced by nuclear explosions, J. Geophys. Res, 1968, 73: 448.